Исследование функций. Построение графиков.

Определение 1. *Точка x_0 называется* **точкой локального минимума (максимума)** *функции $f(x)$, если существует такое положительное число δ, что неравенство $f(x_0) \leqslant f(x)$ ($f(x_0) \geqslant f(x)$) выполнено для всех точек x из множества $B_\delta(x_0)$.*

Точка x_0 называется **точкой строгого локального минимума (максимума)** *функции $f(x)$, если существует такое положительное число δ, что неравенство $f(x_0) < f(x)$ ($f(x_0) > f(x)$) выполнено для всех точек x из множества $\overset{\circ}{B}_\delta(x_0)$.*

Определение 2. *Функция $f(x)$* **возрастает (не убывает)** *в точке x_0, если существует такое положительное число δ, что $f(x) < f(x_0)$ ($f(x) \leqslant f(x_0)$) при всех $x \in (x_0 - \delta, x_0)$ и $f(x) > f(x_0)$ ($f(x) \geqslant f(x_0)$) при всех $x \in (x_0, x_0 + \delta)$.*

Функция $f(x)$ **убывает (не возрастает)** *в точке x_0, если существует такое положительное число δ, что $f(x) > f(x_0)$ ($f(x) \geqslant f(x_0)$) при всех $x \in (x_0 - \delta, x_0)$ и $f(x) < f(x_0)$ ($f(x) \leqslant f(x_0)$) при всех $x \in (x_0, x_0 + \delta)$.*

Определение 3. *Точка x_0 называется* **стационарной** *точкой функции $f(x)$, если $f'(x_0) = 0$.*

Теорема 1. *Пусть функция $f(x)$ дифференцируема на интервале (A, B), $A < a < b < B$ и $f'(a) \cdot f'(b) < 0$. Тогда существует точка $c \in (a, b)$ такая, что $f'(c) = 0$.*

Доказательство. Пусть, например, $f'(a) > 0$, $f'(b) < 0$. Тогда функция $f(x)$ возрастает в точке a и убывает в точке b (по теореме о достаточном условии возрастания (убывания) функции в точке). С другой стороны, $f(x)$ дифференцируема на $[a, b]$, следовательно, непрерывна на этом сегменте. Значит, в силу второй теоремы Вейерштрасса, существует такая точка $c \in [a, b]$, что $f(c) = \sup\limits_{a \leqslant x \leqslant b} f(x)$. Из сказанного выше следует, что $c \neq a$ и $c \neq b$, следовательно, c — точка локального максимума $f(x)$ и $f'(c) = 0$ (необходимое условие экстремума дифференцируемой функции). □

Следствие. (Теорема Дарбу). *Пусть функция $f(x)$ дифференцируема на интервале (A, B), $A < a < b < B$, $f'(a) = \alpha$, $f'(b) = \beta$. Тогда для любого числа γ из сегмента $[\alpha, \beta]$ (или $[\beta, \alpha]$) найдется такая точка $c \in [a, b]$, что $f'(c) = \gamma$.*

Доказательство. Если $\gamma = \alpha$ или $\gamma = \beta$, то утверждение очевидно. В противном случае применим теорему 1 к функции $g(x) = f(x) - \gamma x$. □

Теорема 2. (Первое достаточное условие экстремума). *Пусть функция $f(x)$ дифференцируема в проколотой $\delta-$окрестности точки c для некоторого $\delta > 0$ и непрерывна в точке c. Тогда*

1) если $f'(x) > 0$ при всех $x \in (c - \delta, c)$ и $f'(x) < 0$ при всех $x \in (c, c + \delta)$, то c — точка строгого локального максимума $f(x)$;

2) если $f'(x) < 0$ при всех $x \in (c - \delta, c)$ и $f'(x) > 0$ при всех $x \in (c, c + \delta)$, то c — точка строгого локального минимума $f(x)$;

3) если $f'(x)$ не меняет знак при переходе через точку c, то экстремума в этой точке нет.

Замечание 1. *Если $f'(x)$ существует в проколотой окрестности точки c и меняет знак при переходе через эту точку, то возможен только один из двух случаев: $f'(c)$ не существует или $f'(c) = 0$ (теорема 1).*

Доказательство. Пусть точка $x_0 \in \overset{\circ}{B}_\delta(c)$. Тогда $f(c) - f(x_0) = f'(\xi)(c - x_0)$ (теорема Лагранжа; точка ξ лежит между c и x_0). Если $x_0 < c$, то $\xi \in (x_0, c)$, следовательно, $f'(\xi) > 0$, $c - x_0 > 0$, значит, $f(c) > f(x_0)$. Если же $x_0 > c$, то $f'(\xi) < 0$, $c - x_0 < 0$, значит опять $f(c) > f(x_0)$. Получаем, что c — точка строгого локального максимума. Второй пункт рассматривается аналогично.

Если $f'(x)$ не меняет знак при переходе через точку c, то выражение $f(c) - f(x_0)$ меняет знак, следовательно, экстремума в точке c нет. □

Теорема 3. (Второе достаточное условие экстремума). *Пусть функция $f(x)$ дифференцируема в некоторой окрестности точки c, причем $f'(c) = 0$, и пусть существует $f''(c)$. Тогда, если $f''(c) < 0$ ($f''(c) > 0$), то c — точка строгого локального максимума (минимума) $f(x)$.*

Доказательство. Предположим, что $f''(c) < 0$. Тогда функция $f'(x)$ убывает в точке c, следовательно, найдется такое число $\delta > 0$, что $f'(x) > f'(c) = 0$ при всех $x \in (c - \delta, c)$ и $f'(x) < f'(c) = 0$ при всех $x \in (c, c + \delta)$. Согласно теореме 2, это означает, что x — точка строгого локального максимума функции $f(x)$. Случай $f'(c) > 0$ рассатривается аналогично. □

Замечание 2. *Если $f'(c) = 0$ или не существует, то теорема «не работает».*

Теорема 4. (Третье достаточное условие экстремума). *Пусть n — некоторое нечетное натуральное число. Если функция $f(x)$ n раз дифференцируема в некоторой окрестности точки c и существует $f^{(n+1)}(c)$, причем $f'(c) = f''[(c) = \cdots = f^{(n)}(c) = 0$, $f^{(n+1)}(c) < 0 (> 0)$, то c — точка строгого локального максимума (минимума) функции $f(x)$.*

Доказательство. Случай $n = 1$ уже рассмотрен в теореме 3. Пусть n — нечетное натуральное число, $n \geqslant 3$. Предположим, что $f^{(n+1)}(c) < 0$. Тогда функция $f^{(n)}(x)$ убывает в точке c, следовательно, найдется такое число $\delta > 0$, что $f^{(n)}(x) > f^{(n)}(c) = 0$ при всех $x \in (c - \delta, c)$ и $f^{(n)}(x) < f^{(n)}(c) = 0$ при всех $x \in (c, c + \delta)$. Пусть x — произвольная точка из проколотой $\delta-$окрестности точки c. Применим разложение Тейлора с центром в точке c к функции $f'(x)$:

$$f'(x) = f'(c) + \frac{f''(c)}{1!}(x - c) + \frac{f'''(c)}{2!}(x - c)^2 + \cdots + \frac{f^{(n-1)}(c)}{(n-2)!}(x - c)^{n-2} + \frac{f^{(n)}(\xi)}{(n-1)!}(x - c)^{n-1}.$$

Здесь ξ — некоторая точка, лежащая между c и x. Поскольку $f'(c) = \cdots = f^{(n-1)}(c) = 0$, то получаем, что $f'(x) = \dfrac{f^{(n)}(\xi)}{(n-1)!}(x - c)^{n-1}$. Если $x < c$, то $\xi \in (x, c)$, следовательно, $f^{(n)}(\xi) > 0$, $(x - c)^{n-1} > 0$ (так как $n - 1$ — четное число), значит, $f'(x) > 0$. Если же $x > c$, то $f^{(n)}(\xi) < 0$, $(x - c)^{n-1} > 0$, значит, $f'(x) < 0$. Получили, что $f'(x) > 0$ при всех

$x \in (c-\delta, c)$ и $f'(x) < 0$ при всех $x \in (c, c+\delta)$, то есть c — точка строгого локального максимума (теорема 2).

Случай $f^{(n+1)}(c) > 0$ рассматривается аналогичино. $\square$

Определение 4. *Пусть функция $f(x)$ дифференцируема на интервале (a,b). Говорят, что график $f(x)$ является* ***выпуклым вверх (вниз)*** *на (a,b), если на этом интервале он лежит не выше (не ниже) касательной в любой точке $x \in (a,b)$.*

Замечание 3. *Поскольку $|f'(x)| < +\infty$ при всех $x \in (a,b)$, то касательная не может быть параллельна оси Oy, то есть понятие не выше (не ниже) всегда имеет смысл.*

Утверждение 1. *Если функция $f(x)$ является выпуклой вверх (вниз) на интервале (a,b), то для любых точек x_1, x_2, из отрезка $[a,b]$, $x_1 < x_2$, график $f(x)$ на интервале (x_1, x_2) лежит не ниже (не выше) хорды A_1A_2, где $A_1(x_1, f(x_1))$, $A_2(x_2, f(x_2))$.*

Доказательство. Пусть $f(x)$ является выпуклой вверх, точка $x_0 \in (x_1, x_2)$. Тогда точки A_1 и A_2 лежат по одну сторону от касательной в точке x_0. Следовательно, и отрезок A_1A_2 лежит под касательной, то есть точка $(x_0, f(x_0))$ — над хордой A_1A_2. В силу произвольности выбора точки x_0 получаем необходимое утверждение. $\square$

Упражнение 1. *Доказать обратное: если функция $f(x)$ дифференцируема на интервале (a,b) и для любых двух точек $x_1, x_2 \in [a,b]$, $x_1 < x_2$, график $f(x)$ лежит не ниже (не выше) хорды A_1A_2, то функция $f(x)$ выпукла вверх (вниз) на (a,b).*

Утверждение 2. (Неравенство Йенсена). *Если функция $f(x)$ является выпуклой вверх (вниз) на интервале (a,b), то для любых точек $x_1, x_2 \in (a,b)$ и для любых положительных λ_1, λ_2 таких, что $\lambda_1 + \lambda_2 = 1$, верно неравенство*

$$f(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) \geqslant \lambda_1 f(x_1) + \lambda_2 f(x_2) \quad (f(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) \leqslant \lambda_1 f(x_1) + \lambda_2 f(x_2)).$$

Доказательство. Пусть $a \leqslant x_1 < x_2 \leqslant b$, $\lambda_1 > 0$, $\lambda_2 > 0$, $\lambda_1 + \lambda_2 = 1$. Тогда точка $x_0 = \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 \in (x_1, x_2)$. Запишем уравнение хорды A_1A_2: $\dfrac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \dfrac{y - f(x_1)}{f(x_2) - f(x_1)}$. Подставим в это уравнение точку (x_0, y_0), принадлежащую хорде:

$$\frac{\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y_0 - f(x_1)}{f(x_2) - f(x_1)} \Leftrightarrow \frac{(\lambda_1 - 1)x_1 + \lambda_2 x_2}{x_2 - x_1} = \frac{y_0 - f(x_1)}{f(x_2) - f(x_1)} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow y_0 - f(x_1) = \lambda_2(f(x_2) - f(x_1)) \Leftrightarrow y_0 = \lambda_1 f(x_1) + \lambda_2 f(x_2).$$

Если функция $f(x)$ является выпуклой вверх (вниз) на (a,b), то по определению это означает, что $y_0 \leqslant f(x_0)$ $(y_0 \geqslant f(x_0))$. $\square$

Теорема 5. *Если функция $f(x)$ дважды дифференцируема на интервале (a,b) и $f''(x) \leqslant 0$ $(f''(x) \geqslant 0)$ для любой точки $x \in (a,b)$, то $f(x)$ является выпуклой вверх (вниз) на (a,b).*

Доказательство. Пусть $f''(x) \leqslant 0$ при всех $x \in (a,b)$. Обозначим $M(c, f(c))$, где c — некоторая точка из (a,b). Запишем уравнение касательной к графику $f(x)$ в точке M: $y = f'(c)(x-c) + f(c)$. С другой стороны, согласно формуле Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа, $f(x) = f(c) + f'(c)(x-c) + \dfrac{f''(\xi)}{2!}(x-c)^2$, где x — произвольная точка из (a,b), ξ лежит между c и x. Отсюда получаем, что $f(x) - y = \dfrac{f''(\xi)}{2!}(x-c)^2 \leqslant 0$, то есть $f(x) \leqslant y$. Значит, график $f(x)$ лежит не выше касательной, то есть $f(x)$ выпукла вверх. □

Следствие. *Пусть функция $f(x)$ дважды дифференцируема в некоторой окрестности точки c, причем $f''(x)$ непрерывна в точке c и $f''(c) > 0 (< 0)$. Тогда найдется $\delta > 0$ такое, что $f(x)$ выпукла вниз (вверх) в $B_\delta(c)$.*

Доказательство. Пусть $f''(c) > 0(< 0)$. Тогда, в силу теоремы о сохранении знака непрерывной функцией, существует $\delta > 0$ такое, что $f''(x) > 0(< 0)$ при всех $x \in B_\delta(c)$. Значит, $f(x)$ выпукла вниз (вверх) в $B_\delta(c)$. □

Замечание 4. *Если $f''(x) = 0$ при всех $x \in (a,b)$, то $f(x)$ — линейная функция на (a,b) (доказать!) и направление выпуклости можно считать произвольным.*

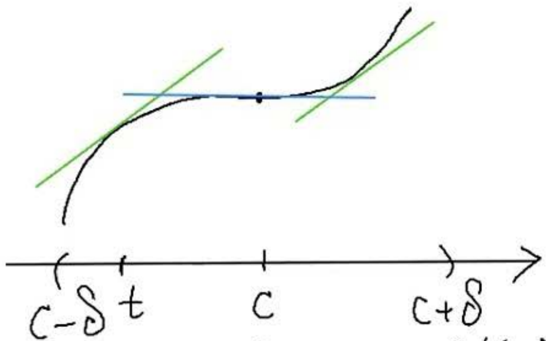
Теорема 6. *Пусть функция $f(x)$ является выпуклой вниз (вверх) на интервале (a,b). Тогда функция $f'(x)$ непрерывна и не убывает (не возрастает) на (a,b).*

Доказательство. Пусть $f(x)$ выпукла вниз на (a,b); $a \leqslant x_1 < x_2 \leqslant b$. Обозначим через k_0 угловой коэффициент хорды A_1A_2, $A_1(x_1, f(x_1))$, $A_2(x_2, f(x_2))$. Поскольку касательная к графику $f(x)$ в точке A_1 лежит не выше графика на интервале (x_1, x_2), следовательно, она лежит не выше хорды A_1A_2, значит, ее угловой коэффициент $f'(x_1) \leqslant k_0$. Аналогично $f'(x_2) \geqslant k_0$, то есть $f'(x_1) \leqslant f'(x_2)$. В силу произвольности выбора точек x_1, x_2 получаем, $f'(x)$ не убывает на (a,b). С другой стороны, известно, что производная принимает все промежуточные значения на отрезке $[x_1, x_2]$ (теорема Дарбу). Следовательно, она непрерывна на этом отрезке (критерий непрерывности монотонной функции). Поскольку x_1, x_2 — произвольные точки из интервала (a,b), то это означает, что $f(x)$ непрерывна на всем интервале. □

Определение 5. *Пусть функция $f(x)$ дифференцируема на интервале (a,b), $c \in (a,b)$. Точка $M(c, f(c))$ называется* **точкой перегиба** *графика $f(x)$, если существует такое число $\delta > 0$, что $B_\delta(c) \subset (a,b)$ и $f(x)$ имеет разные направления выпуклости на интервалах $(c-\delta, c)$ и $(c, c+\delta)$.*

Пример 1. *для функции $f(x) = \operatorname{tg} x$ точка $c = 0$ является точкой перегиба.*

Лемма 1. *Пусть функция $f(x)$ дифференцируема на интервале (a,b), $c \in (a,b)$ — точка перегиба $f(x)$. Тогда функция $r(x) = f(x) - (f(c) + f'(c)(x-c))$ монотонна в точке c (то есть график функции $f(x)$ в некоторой окрестности точки c лежит по разные стороны от касательной в точке $M(c, f(c))$).*



Введем вспомогательную ф-цию:
$r(x) = f(x) - f'(c)(x-c) - f(c)$

Очевидно, что $r(c)=0$.

Лемма. Если c — точка перегиба f, и $f'(x)$ непрерывна в точке c, то ф-ция $r(x)$ монотонна в точке c.

Д-во: Пусть f $\cap$ на $(c-\delta;c)$ и $\cup$ на $(c;c+\delta)$. Пусть $t\in(c-\delta;c)$. Тогда $\forall x\in(c-\delta;c)$: $f(x)\le f'(t)(x-t)+f(t) \xrightarrow[t\to c-0]{} f'(c)(x-c)+f(c) \Rightarrow r(x)\le 0\ \forall x\in(c-\delta;c)$

Аналогично $r(x)\ge 0\ \forall x\in(c;c+\delta)$ $\Big\} \Rightarrow r$ не убывает в т. c

ч.т.д.

Теорема 7. (Необходимое условие перегиба). *Пусть функция $f(x)$ дважды дифференцируема в точке c и точка $M(c, f(c))$ является точкой перегиба $f(x)$. Тогда $f''(c) = 0$.*

Доказательство. Предположим, что $f''(c) \neq 0$. Рассмотрим функцию

$$r(x) = f(x) - (f(c) + f'(c)(x - c)).$$

Для нее будут выполнены условия: $r'(c) = f'(c) - f'(c) = 0$, $r''(c) = f''(c) \neq 0$. Это означает, что c — точка строгого локального экстремума функции $r(x)$, что противоречит доказанной выше лемме. Значит, наше предположение неверно и $f''(c) = 0$. □

Замечание 5. *Условие $f''(c) = 0$ не является достаточным условием перегиба. Например, для функции $f(x) = x^4$: $f''(0) = 0$, но перегиба в точке 0 нет.*

Теорема 8. (Первое достаточное условие перегиба). *Пусть функция $f(x)$ дважды дифференцируема в проколотой δ-окрестности точки c для некоторого $\delta > 0$ и пусть существует $f'(c)$. Тогда, если $f''(x)$ имеет разные знаки на интервалах $(c-\delta, c)$ и $(c, c+\delta)$, то c — точка перегиба графика $f(x)$.*

Доказательство. Если $f''(x)$ имеет разные знаки на интервалах $(c-\delta, c)$ и $(c, c+\delta)$, значит, функция $f(x)$ имеет разные направления выпуклости на этих промежутках (теорема 5). Но это по определению означает, что c — точка перегиба. □

Замечание 6. *Иногда при определении точки перегиба допускается, чтобы $f'(c) = \infty$, то есть чтобы график функции $f(x)$ имел вертикальную касательную в точке c. При таком определении, например, функция $f(x) = \sqrt[3]{x}$ имеет перегиб в точке 0.*

Теорема 9. (Второе достаточное условие перегиба). *Пусть функция $f(x)$ дважды дифференцируема в некоторой окрестности точки c, причем $f''(c) = 0$ и пусть существует $f'''(c) \neq 0$. Тогда c — точка перегиба графика $f(x)$.*

Доказательство. Предположим, что $f'''(c) < 0 (> 0)$. Тогда функция $f''(x)$ убывает (возрастает) в точке c, следовательно, найдется такое число $\delta > 0$, что $f''(x) > f''(c) = 0$ ($f''(x) < f''(c) = 0$) при всех $x \in (c - \delta, c)$ и $f''(x) < f''(c) = 0$ ($f''(x) > f''(c) = 0$) при всех $x \in (c, c + \delta)$. Согласно теореме 8, это означает, что x — точка перегиба графика функции $f(x)$. $\square$

Теорема 10. (Третье достаточное условие перегиба). *Пусть n — некоторое четное натуральное число. Если функция $f(x)$ n раз дифференцируема в некоторой окрестности точки c и существует $f^{(n+1)}(c)$, причем $f''(c) = f'''[(c) = \cdots = f^{(n)}(c) = 0$, $f^{(n+1)}(c) \neq 0$, то c — точка перегиба графика функции $f(x)$.*

Доказательство. Случай $n = 2$ уже рассмотрен в теореме 9. Пусть n — четное натуральное число, $n \geqslant 4$, $f^{(n+1)}(c) \neq 0$. Тогда функция $f^{(n)}(x)$ строго монотонна в точке c, следовательно, найдется такое число $\delta > 0$, что $f^{(n)}(x)$ имеет различные знаки на промежутках $(c - \delta, c)$ и $(c, c + \delta)$ (поскольку $f^{(n)}(c) = 0$). Пусть x — произвольная точка из проколотой $\delta-$окрестности точки c. Применим разложение Тейлора с центром в точке c к функции $f''(x)$:

$$f''(x) = f''(c) + \frac{f'''(c)}{1!}(x-c) + \frac{f^{(4)}(c)}{2!}(x-c)^2 + \cdots + \frac{f^{(n-1)}(c)}{(n-3)!}(x-c)^{n-3} + \frac{f^{(n)}(\xi)}{(n-2)!}(x-c)^{n-2}.$$

Здесь ξ — некоторая точка, лежащая между c и x. Поскольку $f''(c) = \cdots = f^{(n-1)}(c) = 0$, то получаем, что $f''(x) = \dfrac{f^{(n)}(\xi)}{(n-2)!}(x-c)^{n-2}$. Выражение $f^{(n)}(\xi)(x-c)^{n-2}$ имеет различные знаки на интервалах $(c - \delta, c)$ и $(c, c + \delta)$ (так как $n - 2$ — четное число). Значит, $f''(x)$ также имеет различные знаки на этих промежутках, то есть c — точка перегиба (теорема 8). $\square$

Определение 6. *Прямая $x = a$ называется **вертикальной асимптотой** к графику функции $y = f(x)$, если хотя бы один из пределов $\lim\limits_{x \to a-0} f(x)$ или $\lim\limits_{x \to a+0} f(x)$ равен $+\infty$ или $-\infty$.*

Определение 7. *Прямая $y = kx + b$ называется **наклонной асимптотой** к графику функции $y = f(x)$ при $x \to +\infty$ $(-\infty)$, если $f(x) = kx + b + \alpha(x)$, где $\alpha(x) = o(1)$ при $x \to +\infty$ $(-\infty)$. Если $k = 0$, то прямую $y = b$ называют в таком случае **горизонтальной асимптотой**.*

Теорема 11. *Прямая $y = kx + b$ является наклонной асимптотой к графику функции $y = f(x)$ при $x \to +\infty$ $(-\infty)$ тогда и только тогда, когда $\lim\limits_{x \to +\infty(-\infty)} \dfrac{f(x)}{x} = k$ и $\lim\limits_{x \to +\infty(-\infty)} (f(x) - kx) = b$.*

Доказательство. Для определенности будем рассматривать случай $x \to +\infty$.

Необходимость. Пусть $f(x) = kx + b + \alpha(x)$, где $\alpha(x) \to 0$ при $x \to +\infty$. Тогда

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to +\infty} \left(k + \frac{b + \alpha(x)}{x} \right) = k;$$

$$\lim_{x \to +\infty} (f(x) - kx) = \lim_{x \to +\infty} (b + \alpha(x)) = b.$$

Достаточность. Пусть $\lim\limits_{x \to +\infty} (f(x) - kx) = b$. Тогда $f(x) - kx = b + \alpha(x)$, где $\alpha(x) \to 0$ при $x \to +\infty$. □

Общая схема исследования функции.

1. Область определения функции.
2. Четность, периодичность.
3. Точки пересечения с координатными осями; промежутки знакопостоянства.
4. Точки разрыва, промежутки непрерывности.
5. Экстремумы, промежутки монотонности.
6. Точки перегиба, выпуклось.
7. Асимптоты (вертикальные, наклонные).

Пример $f(x)=\frac{(x+1)^2}{x-1}$. 1) $X=\mathbb{R}\setminus\{1\}$

2) непр. на $(-\infty;1)$ и $(1;+\infty)$. $x=1$ – т. разрыва 2-го рода.

3) f: $-$ $\underset{-1}{\bullet}$ $-$ $\underset{1}{\circ}$ $+$ $\to$

Точки пересеч-я с осями: $(-1;0)$ и $(0;-1)$

4) ——

5) $f'(x)=\frac{2(x+1)(x-1)-(x+1)^2}{(x-1)^2}=\frac{2x^2-2-x^2-2x-1}{(x-1)^2}=\frac{x^2-2x-3}{(x-1)^2}$

f': $+$ $\underset{-1}{\bullet}$ $-$ $\underset{1}{\circ}$ $-$ $\underset{3}{\bullet}$ $+$ $\to x$

f: $\nearrow$ -1 $\searrow$ 1 $\searrow$ 3 $\nearrow$

$(-1;0)$ – т. max

$(3;8)$ – т. min

6) $f''(x)=\frac{(2x-2)(x-1)^{\cancel{2}\,1}-(x^2-2x-3)\cdot 2\cdot\cancel{(x-1)}}{(x-1)^{\cancel{4}\,3}}=2\cdot\frac{\cancel{x^2}-\cancel{2x}+1-\cancel{x^2}+\cancel{2x}+3}{(x-1)^3}$

f'': $-$ $\underset{1}{\circ}$ $+$ $\to$

f: $\cap$ 1 $\cup$

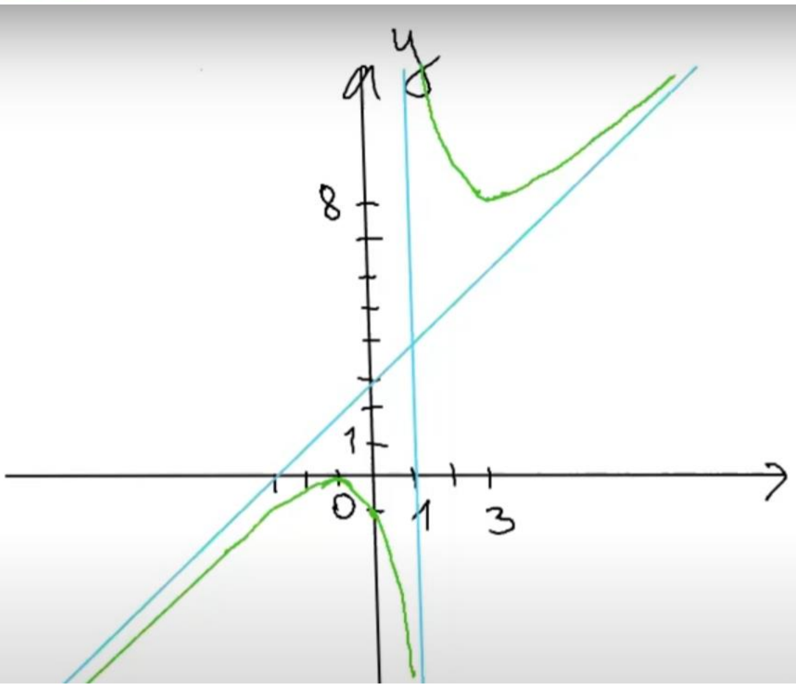
$f''(x)=\frac{8}{(x-1)^3}$

7) $x=1$ – вертикальная ас-та;

$\lim\limits_{x\to 1-0}\frac{(x+1)^2}{x-1}=-\infty$; $\lim\limits_{x\to 1+0}\frac{(x+1)^2}{x-1}=+\infty$

$\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{(x+1)^2}{x(x-1)}=1=k$; $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left(\frac{(x+1)^2}{x-1}-x\right)=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{\cancel{x^2}+2x+1-\cancel{x^2}+x}{x-1}=3$

$y=x+3$ – накл-я ас-та при $x\to\pm\infty$



$\frac{(x+1)^2}{x-1}=x+3+\frac{4}{x-1}$

$\vee$ $x+3$ при $x>1$

$$\begin{array}{r|l} x^2+2x+1 & x-1 \\ \hline -\;x^2-x & x+3 \\ 3x+1 & \\ -\;3x-3 & \\ \hline 4 & \end{array}$$

Лекция 1.

Определенный интеграл. Основные понятия.

Определение 1. Конечное множество $T=\{x_0,x_1,\dots,x_n\}$ называется (*неразмеченным*) *разбиением* отрезка $[a,b]$, если $n\in N$ и $a=x_0<x_1<\ldots<x_n=b$.

Определение 2. Разбиение T' называется *измельчением* разбиения T, если $T\subset T'$ (то есть T' содержит все те же точки, что и T, и, возможно, еще какие-то).

Определение 3. Разбиение T называется *объединением* разбиений T_1 и T_2, если $T=T_1\cup T_2$.

Замечание. Если $T=T_1\cup T_2$, то T - измельчение T_1 и T - измельчение T_2.

Определение 4. Пусть $T=\{x_0,x_1,\dots,x_n\}$. Обозначим $\Delta x_k=x_k-x_{k-1}$. Величина $\Delta_T=\max\limits_{1\le k\le n}\Delta x_k$ называется *диаметром* разбиения T.

Определение 5. Выберем на каждом из отрезков $[x_{k-1},\,x_k]$ точку $\xi_k: x_{k-1}\le\xi_k\le x_k$. Совокупность точек $V=\{x_0,x_1,\dots,x_n;\,\xi_1,\dots,\xi_n\}$ называется *размеченным разбиением* отрезка $[a,b]$.

Замечание. Неразмеченное разбиение T, соответствующее разбиению V, будем обозначать $T(V)$.

Определение 6. Сумма $\sigma(V)=f(\xi_1)\Delta x_1+\ldots+f(\xi_n)\Delta x_n=\sum\limits_{k=1}^{n}f(\xi_k)\Delta x_k$ называется *интегральной суммой* функции $f(x)$, соответствующей размеченному разбиению V.

Определение 7. Число I называется *определенным интегралом* (*Римана*) от функции $f(x)$ на отрезке $[a,b]$, если это число является пределом интегральных сумм при стремлении диаметра разбиения к нулю (причем значение предела не зависит от выбора размеченного разбиения), то есть если для любого числа $\varepsilon>0$ найдется $\delta=\delta(\varepsilon)>0$ такое, что для любого V - размеченного разбиения отрезка $[a,b]$, $\Delta_V<\delta$ выполнено: $|I-\sigma(V)|<\varepsilon$ $\left(\left|I-\sum\limits_{k=1}^{n}f(\xi_k)\Delta x_k\right|<\varepsilon\right)$. Обозначение: $I=\int\limits_a^b f(x)dx$. Функция $f(x)$, для которой существует определенный интеграл Римана, называется *интегрируемой* (*по Риману*) на отрезке $[a,b]$. Обозначение: $f(x)\in R[a,b]$. Число a называется *нижним пределом интегрирования*, число b – *верхним пределом*.

Докажем корректность данного определения.

Утверждение 1. Если существуют два числа I_1, I_2, удовлетворяющие определению 7, то $I_1=I_2$.

Доказательство. Пусть $I_1<I_2$. Обозначим $\varepsilon=\dfrac{I_2-I_1}{2}>0$. Тогда по определению существует $\delta=\delta(\varepsilon)>0$, т.ч. для любого V - размеченного разбиения отрезка $[a,b]$, удовлетворяющего условию $\Delta_V < \delta$, выполняется: $|I_1 - \sigma(V)| < \varepsilon$, $|I_2 - \sigma(V)| < \varepsilon$. Значит, $I_2 - I_1 = |I_2 - I_1| \le |I_2 - \sigma(V)| + |I_1 - \sigma(V)| < 2\varepsilon = I_2 - I_1$. Мы пришли к противоречию. Утверждение доказано.

Теорема 1 (необходимое условие интегрируемости). Пусть функция $f(x)$ интегрируема по Риману на отрезке $[a,b]$. Тогда $f(x)$ ограничена на $[a,b]$.

Доказательство. Пусть $f(x)$ не ограничена на отрезке $[a,b]$. Пусть $\delta > 0$, $T = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$, $\Delta_T < \delta$. Существует отрезок разбиения $[x_{r-1}, x_r]$, на котором $f(x)$ не ограничена. Пусть $M > 0$, $\xi_1, \ldots, \xi_{r-1}, \xi_{r+1}, \ldots, \xi_n$ - произвольные точки, удовлетворяющие условию $\xi_k \in [x_{k-1}, x_k]$. Обозначим $A = \left| \sum_{\substack{k=1,\\ k\ne r}}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k \right|$. Так как $f(x)$ не ограничена на отрезке $[x_{r-1}, x_r]$, то существует точка $\xi_r \in [x_{r-1}, x_r]$ такая, что $f(\xi_r) > \dfrac{M+A}{\Delta x_r}$. Тогда мы получим, что для любого числа $M > 0$ и для любого $\delta > 0$ существует $V = \{x_0, x_1, \ldots, x_n; \xi_1, \ldots, \xi_n\}$ - размеченное разбиение отрезка $[a,b]$, $\Delta_V < \delta$, такое, что $|\sigma(V)| \ge |f(\xi_r)\Delta x_r| - \left| \sum_{\substack{k=1,\\ k\ne r}}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k \right| > \dfrac{M+A}{\Delta x_r}\Delta x_r - A = M$. Это означает, что множество интегральных сумм $\sigma(V)$, удовлетворяющих условию $\Delta_V < \delta$, не ограничено при любом $\delta > 0$. Мы пришли к противоречию с определением интеграла Римана. Теорема доказана.

Пусть функция $f(x)$ ограничена на отрезке $[a,b]$. Обозначим $M = \sup\limits_{a\le x\le b} f(x)$, $m = \inf\limits_{a\le x\le b} f(x)$, $M_k = \sup\limits_{x_{k-1}\le x\le x_k} f(x)$, $m_k = \inf\limits_{x_{k-1}\le x\le x_k} f(x)$, где $T = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ - некоторое разбиение отрезка $[a,b]$.

Определение 8. *Верхней* (*нижней*) *суммой Дарбу* функции $f(x)$ на отрезке $[a,b]$, отвечающей разбиению $T = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$, называется сумма $S(T) = \sum_{k=1}^{n} M_k \Delta x_k$ $\left(s(T) = \sum_{k=1}^{n} m_k \Delta x_k \right)$.

Определение 9. Число $I^* = \inf\limits_T \{S(T)\}$ ($I_* = \sup\limits_T \{s(T)\}$) называется *верхним* (*нижним*) *интегралом Дарбу* от функции $f(x)$ на отрезке $[a,b]$ (здесь точная верхняя и нижняя грани берутся по всем возможным разбиениям T отрезка $[a,b]$).

Теорема 2 (критерий Римана интегрируемости функции на отрезке). Пусть функция $f(x)$ ограничена на отрезке $[a,b]$. Тогда $f(x)$ интегрируема на отрезке $[a,b]$ тогда и только тогда, когда для любого числа $\varepsilon > 0$ найдется T - разбиение $[a,b]$ такое, что $S(T) - s(T) < \varepsilon$.

Прежде, чем приступать к доказательству теоремы, докажем несколько вспомогательных лемм (их часто называют леммами Дарбу).

Лемма 1. Для любого размеченного разбиения V отрезка $[a,b]$ имеют место неравенства: $s(T(V)) \le \sigma(V) \le S(T(V))$.

Доказательство. Поскольку для любой точки $\xi_k \in [x_{k-1},\, x_k]$ имеют место неравенства $m_k \le f(\xi_k) \le M_k$, то, просуммировав их, получим $\sum_{k=1}^{n} \Delta x_k m_k \le \sum_{k=1}^{n} \Delta x_k f(\xi_k) \le \sum_{k=1}^{n} \Delta x_k M_k$. Лемма 1 доказана.

Лемма 2. Для любого разбиения T отрезка $[a,b]$ выполнено: $s(T) = \inf\limits_{V} \{\sigma(V)\}$, $S(T) = \sup\limits_{V} \{\sigma(V)\}$, где точная нижняя и верхняя грани берутся по всем возможным размеченным разбиениям V, которым соответствует разбиение T.

Доказательство. Пусть $T = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ - произвольное разбиение отрезка $[a,b]$. Возьмем произвольное число $\varepsilon > 0$. Так как $M_k = \sup\limits_{x_{k-1} \le x \le x_k} f(x)$, то найдется точка $\xi_k \in [x_{k-1},\, x_k]$ такая, что $f(\xi_k) > M_k - \dfrac{\varepsilon}{b-a}$.

Тогда $\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k) \Delta x_k > \sum_{k=1}^{n} M_k \Delta x_k - \dfrac{\varepsilon}{b-a} \sum_{k=1}^{n} \Delta x_k = S(T) - \varepsilon$, поскольку сумма длин всех отрезков разбиения равна длине исходного отрезка. Значит, для любого числа $\varepsilon > 0$ найдется V - размеченное разбиение отрезка $[a,b]$, для которого $\sigma(V) > S(T) - \varepsilon$. Однако из леммы 1 следует, что $\sigma(V) \le S(T)$ для любого размеченного разбиения V. Значит, $S(T) = \sup\limits_{V} \{\sigma(V)\}$. Второе утверждение леммы доказывается аналогично. Лемма 2 доказана.

Лемма 3. Пусть $T = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ - разбиение отрезка $[a,b]$, $T' = \{x_0, x_1, \dots, x_n, x_1', \dots, x_l'\}$ - измельчение разбиения T. Тогда $S(T') \le S(T)$, $s(T') \ge s(T)$, причем $S(T) - S(T') \le l(M-m)\Delta_T$, $s(T') - s(T) \le l(M-m)\Delta_T$.

Доказательство. Пусть $T' = \{x_0, x_1, \dots, x_n, x'\}$, причем $x' \in [x_{k-1},\, x_k]$. Тогда k-тое слагаемое в сумме для $S(T)$ имеет вид: $M_k \Delta x_k = (x_k - x_{k-1}) \cdot \sup\limits_{x_{k-1} \le x \le x_k} f(x)$, а соответствующее слагаемое в сумме для $S(T')$: $(x' - x_{k-1}) \cdot \sup\limits_{x_{k-1} \le x \le x'} f(x) + (x_k - x') \cdot \sup\limits_{x' \le x \le x_k} f(x)$; все остальные слагаемые в этих суммах совпадают. Так как $\sup\limits_{x_{k-1} \le x \le x'} f(x) \le M_k$, $\sup\limits_{x' \le x \le x_k} f(x) \le M_k$, то $S(T') \le S(T)$.

С другой стороны, $S(T) - S(T') \le M_k \Delta x_k\, ((x' - x_{k-1}) \cdot \sup\limits_{x_{k-1} \le x \le x'} f(x) + (x_k - x') \cdot \sup\limits_{x' \le x \le x_k} f(x)) \le$ $\le (M-m)\Delta x_k \le (M-m)\Delta_T$, поскольку $M_k \le M$, $\sup\limits_{x_{k-1} \le x \le x'} f(x) \ge m$, $\sup\limits_{x' \le x \le x_k} f(x) \ge m$. Значит, при добавлении одной точки верхняя сумма Дарбу уменьшится не более чем на $(M-m)\Delta_T$. Тогда при добавлении *l* точек она уменьшится не более чем на $l(M-m)\Delta_T$ (так как диаметр разбиения при измельчении может только уменьшиться). Утверждение для нижней суммы Дарбу проверяется аналогично. Лемма 3 доказана.

Лемма 4. Пусть T_1, T_2 - произвольные разбиения отрезка $[a,b]$. Тогда $s(T_1) \le S(T_2)$.

Доказательство. Обозначим $T_3 = T_1 \cup T_2$. Тогда T_3 - измельчение и для T_1, и для T_2. Значит, $s(T_1) \le s(T_3) \le S(T_3) \le S(T_2)$ (последняя цепочка неравенств вытекает из предыдущей леммы и из леммы 1). Лемма 4 доказана.

Лемма 5. Если функция $f(x)$ ограничена на отрезке $[a,b]$, то для нее существуют верхний и нижний интегралы Дарбу I^* и I_*, причем для любого разбиения T отрезка $[a,b]$ выполнено: $s(T) \le I_* \le I^* \le S(T)$.

Доказательство. Докажем сначала существование. Для любого разбиения T отрезка $[a,b]$ имеем $s(T) = \sum_{k=1}^{n} m_k \Delta x_k \le M \sum_{k=1}^{n} \Delta x_k = M(b-a)$. Значит, множество нижних сумм Дарбу ограничено сверху. Следовательно, у него существует точная верхняя грань. Аналогично доказывается существование точной нижней грани у множества верхних сумм Дарбу.

Перейдем к доказательству неравенств. Так как $I^* = \inf_T \{S(T)\}$, то $I^* \le S(T)$. Аналогично $s(T) \le I_*$. Покажем, что $I_* \le I^*$. Пусть это не так. Обозначим $\varepsilon = \dfrac{I_* - I^*}{2} > 0$. Тогда существует T_1 - разбиение отрезка $[a,b]$, для которого $S(T_1) < I^* + \varepsilon = \dfrac{I^* + I_*}{2}$. Существует T_2 - разбиение отрезка $[a,b]$, для которого $s(T_1) > I_* - \varepsilon = \dfrac{I^* + I_*}{2}$. Отсюда $s(T_2) > S(T_1)$, что противоречит лемме 4. Значит, наше предположение неверно, и $I_* \le I^*$. Лемма 5 доказана.

Лекция 2.

Лемма 6. Нижний и верхний интегралы Дарбу являются пределами соответственно нижней и верхней интегральных сумм при стремлении диаметра разбиения к нулю: $I_* = \lim_{\Delta_T \to 0} s(T)$ ($I^* = \lim_{\Delta_T \to 0} S(T)$), то есть для любого $\varepsilon > 0$ найдется $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ такое, что для любого T - разбиения отрезка $[a,b]$, $\Delta_T < \delta$, выполнено: $\left|s(T) - I_*\right| < \varepsilon$ ($\left|S(T) - I^*\right| < \varepsilon$).

Доказательство. Докажем, что $I^* = \lim_{\Delta_T \to 0} S(T)$. Если $M = \sup_{a \le x \le b} f(x)$, $m = \inf_{a \le x \le b} f(x)$ и $M = m$, то $f(x) = M = m$ для любой точки $x \in [a,b]$. Тогда для любого разбиения T имеет место равенство $S(T) = M(b-a) = I^*$ и лемма доказана.

Пусть теперь $M > m$. Возьмем любое число $\varepsilon > 0$. Так как $I^* = \inf_T \{S(T)\}$, то существует разбиение $T^* = \{x_0^*, x_1^*, \ldots, x_k^*\}$ такое, что $S(T^*) < I^* + \dfrac{\varepsilon}{2}$. Обозначим $\delta = \dfrac{\varepsilon}{2(M-m)(k-1)}$ (заметим, что выбор числа δ зависит только от ε, поскольку k - число точек разбиения T^*, а оно выбирается в зависимости от ε). Пусть $T = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ - произвольное разбиение отрезка $[a,b]$, удовлетворяющее условию $\Delta_T < \delta$. Тогда $T' = \{x_0, x_1, \ldots, x_n, x_1^*, \ldots, x_{k-1}^*\}$ - измельчение T (мы добавили к T точки разбиения T^*). Из леммы 3 вытекает следующая цепочка неравенств:

(2.1) $$0 \le S(T) - S(T') \le (k-1)\big(M-m\big)\Delta_T < (k-1)(M-m)\delta = \frac{\varepsilon}{2}.$$

Так как разбиение T' является измельчением и для разбиения T^*, то из леммы 5 получаем $I^* \le S(T') \le S(T^*)$. Тогда по построению разбиения T^* имеем:

(2.2) $$0 \le S(T') - I^* \le S(T^*) - I^* < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Сложив неравенства (2.1) и (2.2), получим, что $0 \le S(T) - S(T') + S(T') - I^* < \varepsilon$. Мы доказали, что для любого числа $\varepsilon > 0$ найдется число $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ такое, что для любого разбиения T отрезка $[a,b]$, удовлетворяющего условию $\Delta_T < \delta$, выполнено: $0 \le S(T) - I^* < \varepsilon$. Это означает по определению, что $I^* = \lim\limits_{\Delta_T \to 0} S(T)$. Утверждение для нижнего интеграла Дарбу доказывается аналогично. Лемма 6 доказана.

Доказательство теоремы 2. Пусть функция $f(x)$ ограничена на отрезке $[a,b]$. Докажем необходимость. Пусть $f(x)$ интегрируема на отрезке $[a,b]$. Тогда по определению для любого числа $\varepsilon > 0$ найдется $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ такое, что для любого размеченного разбиения V отрезка $[a,b]$, $\Delta_V < \delta$, выполнено: $\left|I - \sigma(V)\right| < \dfrac{\varepsilon}{3}$ (здесь $I = \int\limits_a^b f(x)dx$). Последнее неравенство перепишем в виде:

(2.3) $$I - \frac{\varepsilon}{3} < \sigma(V) < I + \frac{\varepsilon}{3}.$$

Пусть неразмеченное разбиение T соответствует разбиению V, тогда $\Delta_T < \delta$. Так как $s(T) = \inf\limits_V \{\sigma(V)\}$, $S(T) = \{\sup\limits_V \sigma(V)\}$ (см. лемму 2), то из неравенства (2.3) следует, что $I - \dfrac{\varepsilon}{3} \le s(T) \le I + \dfrac{\varepsilon}{3}$, $I - \dfrac{\varepsilon}{3} \le S(T) \le I + \dfrac{\varepsilon}{3}$ (если все элементы множества лежат на некотором отрезке, то точные грани этого множества также принадлежат рассматриваемому отрезку). Отсюда получаем, что $\left|S(T) - s(T)\right| \le \dfrac{2\varepsilon}{3} < \varepsilon$. Необходимость доказана.

Докажем достаточность. Пусть для любого числа $\varepsilon > 0$ найдется разбиение T отрезка $[a,b]$ такое, что $\left|S(T) - s(T)\right| < \varepsilon$. Так как $s(T) \le I_* \le I^* \le S(T)$ (лемма 5), то $I^* - I_* < \varepsilon$. Поскольку ε - произвольное число, а значения верхнего и нижнего интегралов Дарбу от него не зависят, то последнее неравенство означает, что $I^* = I_*$. Обозначим $I = I^* = I_*$. Поскольку $I_* = \lim\limits_{\Delta_T \to 0} s(T)$, $I^* = \lim\limits_{\Delta_T \to 0} S(T)$ (лемма 6), то получаем, что $\lim\limits_{\Delta_T \to 0} (S(T) - s(T)) = 0$. Это означает по определению, что для любого числа $\varepsilon > 0$ найдется $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ такое, что для любого разбиения T отрезка $[a,b]$, $\Delta_T < \delta$, выполнено: $S(T) - s(T) < \varepsilon$. Значит, для любого размеченного разбиения V отрезка $[a,b]$, $\Delta_V < \delta$, выполнено:

(2.4) $$S(T(V)) - s(T(V)) < \varepsilon.$$

Поскольку $s(T(V)) \le \sigma(V) \le S(T(V))$ (лемма 1) и $s(T(V)) \le I \le S(T(V))$ (лемма 5), то из (2.4) получим, что $\left|I - \sigma(V)\right| < \varepsilon$ для любого размеченного разбиения V отрезка $[a,b]$, $\Delta_V < \delta$. Мы доказали, что $I = \lim\limits_{\Delta_V \to 0} \sigma(V)$. Это означает, что функция $f(x)$ интегрируема на отрезке $[a,b]$ и $I = \int\limits_a^b f(x)dx$. Теорема полностью доказана.

Классы интегрируемых функций.

Теорема 1. Пусть функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a,b]$. Тогда $f(x)$ интегрируема на $[a,b]$.

Доказательство. Пусть $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a,b]$, тогда она равномерно непрерывна на этом отрезке (теорема Кантора). Пусть $\varepsilon > 0$ - произвольное число. Тогда найдется число $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ такое, то для любых точек ξ', ξ'' из отрезка $[a,b]$, $|\xi' - \xi''| < \delta$, выполнено: $|f(\xi') - f(\xi'')| < \dfrac{\varepsilon}{b-a}$. Пусть $T = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ - произвольное разбиение отрезка $[a,b]$, удовлетворяющее условию $\Delta_T < \delta$. Тогда для любого натурального числа k, $1 \le k \le n$, справедливы неравенства $|M_k - m_k| < \dfrac{\varepsilon}{b-a}$ (так как $f(x)$ непрерывна на любом отрезке разбиения $[x_{k-1}, x_k]$, то она достигает на нем своих точных граней, значит, существуют точки $\xi_k', \xi_k'' \in [x_{k-1}, x_k]$, для которых $f(\xi_k') = M_k$, $f(\xi_k'') = m_k$). Отсюда следует, что для разности верхней и нижней сумм Дарбу функции $f(x)$, соответствующих разбиению T, справедлива оценка $S(T) - s(T) = \sum\limits_{k=1}^{n} (M_k - m_k)\Delta x_k < \dfrac{\varepsilon}{b-a} \sum\limits_{k=1}^{n} \Delta x_k = \varepsilon$. Согласно критерию Римана интегрируемости функции на отрезке, это означает, что $f(x)$ интегрируема на $[a,b]$. Теорема доказана.

Определение 1. Говорят, что интервал (x', x'') *покрывает* точку x, если $x \in (x', x'')$.

Теорема 2. Пусть функция $f(x)$ определена и ограничена на отрезке $[a,b]$. Если для любого числа $\varepsilon > 0$ существует конечная система интервалов, покрывающих все точки разрыва $f(x)$ на $[a,b]$, сумма длин которых меньше ε, то функция $f(x)$ интегрируема на этом отрезке.

Доказательство. Если $M = m$, где $M = \sup\limits_{a \le x \le b} f(x)$, $m = \inf\limits_{a \le x \le b} f(x)$, то $f(x) = M = m$ для любой точки $x \in [a,b]$ и функция $f(x)$ интегрируема на $[a,b]$ (теорема 1).

Пусть $M > m$. Выберем произвольное число $\varepsilon > 0$. Пусть (x_1', x_1''), ... , (x_l', x_l'') - интервалы, покрывающие все точки разрыва функции $f(x)$ на $[a,b]$, причем $\sum\limits_{k=1}^{l} (x_k'' - x_k') < \dfrac{\varepsilon}{2(M-m)}$ (возможно, что $x_1' < a$, $x_l'' > b$). Пусть $I = [a,b] \setminus \left(\bigcup\limits_{k=1}^{l} (x_k', x_k'') \right)$. Тогда $I = \bigcup\limits_{m=1}^{r} I_m$, где $I_m \subset [a,b]$ - отрезки, причем $r \le l+1$. Так как функция $f(x)$ непрерывна на отрезке I_m для любого m, $1 \le m \le r$, то $f(x)$ равномерно непрерывна на I_m. Значит, существует число $\delta_m > 0$ такое, что для любых точек ξ', ξ'' из отрезка I_m, удовлетворяющих условию $|\xi' - \xi''| < \delta_m$, выполнено: $|f(\xi') - f(\xi'')| < \dfrac{\varepsilon}{b-a}$. Пусть $\delta = \min\limits_{1 \le m \le r} \delta_m$, T_m - разбиение отрезка I_m, $\Delta_{T_m} < \delta$. Тогда $T = \bigcup\limits_{m=1}^{r} T_m$ - разбиение отрезка $[a,b]$. Пусть $T = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ (перенумеровали точки разбиения T). Тогда для разности верхней и нижней сумм Дарбу, соответствующих разбиению T, справедливы следующие соотношения: $S(T)-s(T)=\sum_{k=1}^{n}(M_k-m_k)\Delta x_k = \sum_{[x_{k-1},x_k]\subset I}(M_k-m_k)\Delta x_k$ $+\sum_{[x_{k-1},x_k]\subset[a,b]\setminus I}(M_k-m_k)\Delta x_k \le \le \frac{\varepsilon}{2(b-a)}\sum_{[x_{k-1},x_k]\subset I}\Delta x_k + (M-m)\sum_{k=1}^{l}(x_k''-x_k') < \frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon$ (так как $\sum_{[x_{k-1},x_k]\subset I}\Delta x_k \le \sum_{k=1}^{n}\Delta x_k = b-a$, $\sum_{k=1}^{l}(x_k''-x_k') < \frac{\varepsilon}{2(M-m)}$, $M_k \le M$, $m_k \ge m$). Это означает, что функция $f(x)$ интегрируема на отрезке $[a,b]$. Теорема доказана.

Следствие. Если функция $f(x)$ ограничена на отрезке $[a,b]$ и имеет на нем конечное число точек разрыва, то она интегрируема на $[a,b]$.

Теорема 3. Пусть функция $f(x)$ определена и монотонна на отрезке $[a,b]$. Тогда она интегрируема на этом отрезке.

Доказательство. Будем считать для определенности, что $f(x)$ не убывает на $[a,b]$ (случай, когда $f(x)$ не возрастает, рассматривается аналогично). Если $f(a)=f(b)$, то $f(x)=f(a)=f(b)$ для любой точки x из $[a,b]$ и $f(x)$ интегрируема. Пусть $f(a)<f(b)$. Выберем произвольное число $\varepsilon>0$. Обозначим $\delta=\frac{\varepsilon}{f(b)-f(a)}$. Пусть $T=\{x_0,x_1,\ldots,x_n\}$ - произвольное разбиение отрезка $[a,b]$, $\Delta_T<\delta$. Тогда

$$S(T)-s(T)=\sum_{k=1}^{n}(M_k-m_k)\Delta x_k=\sum_{k=1}^{n}(f(x_k)-f(x_{k-1}))\Delta x_k<\delta\sum_{k=1}^{n}(f(x_k)-f(x_{k-1}))=$$

$$=\delta(f(x_1)-f(a)+f(x_2)-f(x_1)+\ldots+f(x_{n-1})-f(x_{n-2})+f(b)-f(x_{n-1}))=$$

$$=\frac{\varepsilon}{f(b)-f(a)}\left(f(b)-f(a)\right)=\varepsilon.$$

Значит, функция $f(x)$ интегрируема на отрезке $[a,b]$. Теорема доказана.

Определение 2. Функция $f(x)$ *удовлетворяет условию Липшица* на отрезке $[a,b]$, если существует универсальная константа $C>0$ такая, что для любых двух точек $x_1,x_2\in[a,b]$ выполнено: $|f(x_1)-f(x_2)|\le C|x_1-x_2|$.

Замечание. Очевидно, что, если функция $f(x)$ удовлетворяет условию Липшица на отрезке $[a,b]$, то она непрерывна на этом отрезке.

Теорема 4. Пусть функция $f(x)$ интегрируема на отрезке $[a,b]$, $M=\sup_{a\le x\le b} f(x)$, $m=\inf_{a\le x\le b} f(x)$. Пусть функция $\varphi(y)$ определена на отрезке $[m,M]$ и удовлетворяет на нем условию Липшица. Тогда сложная функция $\varphi(f(x))$ интегрируема на отрезке $[a,b]$.

Доказательство. Зафиксируем число $\varepsilon>0$. Так как функция $f(x)$ интегрируема на отрезке $[a,b]$, то существует такое разбиение $T=\{x_0,x_1,\ldots,x_n\}$ отрезка $[a,b]$, что $S(T)-s(T)<\frac{\varepsilon}{C}$, где $S(T)$ и $s(T)$ - верхняя и нижняя суммы Дарбу для функции $f(x)$, соответствующие разбиению T, а C - постоянная из условия Липшица для функции $\varphi(y)$. Пусть $M_k=\sup_{x_{k-1}\le x\le x_k} f(x)$, $m_k=\inf_{x_{k-1}\le x\le x_k} f(x)$, $M_k^*=\sup_{x_{k-1}\le x\le x_k}\varphi(f(x))$, $m_k^*=\inf_{x_{k-1}\le x\le x_k}\varphi(f(x))$.

Тогда для любых двух точек $\xi_1, \xi_2 \in [x_{k-1}, x_k]$ справедливы неравенства: $\varphi(f(\xi_1)) - \varphi(f(\xi_2)) \le |\varphi(f(\xi_1)) - \varphi(f(\xi_2))| \le C|f(\xi_1) - f(\xi_2)| \le C(M_k - m_k)$. Поскольку точки ξ_1, ξ_2 выбираются произвольно, последнее неравенство означает, что $M_k^* - m_k^* \le C(M_k - m_k)$. Тогда $S^*(T) - s^*(T) = \sum_{k=1}^{n}(M_k^* - m_k^*)\Delta x_k \le C\sum_{k=1}^{n}(M_k - m_k)\Delta x_k <$ $< C \cdot \dfrac{\varepsilon}{C} = \varepsilon$, где $S^*(T)$ и $s^*(T)$ - соответственно верхняя и нижняя суммы Дарбу для функции $\varphi(f(x))$. Таким образом, разность между верхней и нижней суммами Дарбу функции $\varphi(f(x))$, соответствующими разбиению T, меньше ε. Это означает, что данная функция интегрируема на отрезке $[a,b]$. Теорема доказана.

Лекция 3.

Замечание. 1) Справедливо и более сильное утверждение, чем в теореме 4 (без доказательства): пусть функция $f(x)$ интегрируема на отрезке $[a,b]$, $M = \sup\limits_{a \le x \le b} f(x)$, $m = \inf\limits_{a \le x \le b} f(x)$. Пусть функция $\varphi(x)$ определена на отрезке $[m, M]$ и непрерывна на нем. Тогда сложная функция $\varphi(f(x))$ интегрируема на отрезке $[a,b]$.

2) Композиция двух интегрируемых функций не обязательно будет интегрируема. Например, пусть $\varphi(x) = \begin{cases} 0, & x = 0 \\ 1, & x \ne 0 \end{cases}$, $x \in [0,1]$;

(3.1) $$f(x) = \begin{cases} 0, & x - \textit{иррациональное} \\ 1/n, & x = m/n - \textit{рациональное} \end{cases}, \ x \in (0,1]; \ f(0) = 1$$

(так определенная функция $f(x)$ называется *функцией Римана*. Для нее $M = 1$, $m = 0$). Тогда

(3.2) $$\varphi(f(x)) = \begin{cases} 0, & x - \textit{иррациональное} \\ 1, & x - \textit{рациональное} \end{cases}$$

- функция Дирихле. Очевидно, что $\varphi(x) \in R[0,1]$ (она ограничена и имеет одну точку разрыва на этом отрезке). Функция $f(x)$ также интегрируема на $[0,1]$ (см. пример 3 ниже). Однако их композиция – функция Дирихле – не является интегрируемой на отрезке $[0,1]$ (см. пример 1).

Примеры. 1) Функция Дирихле $D(x) = \begin{cases} 0, & x - \textit{иррациональное} \\ 1, & x - \textit{рациональное} \end{cases}$ не интегрируема на отрезке $[0,1]$. Покажем это. Пусть $T = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ - произвольное разбиение отрезка $[0,1]$. Тогда для любого натурального числа k, $1 \le k \le n$, найдется рациональное число $\xi_k' \in [x_{k-1}, x_k]$ и иррациональное число $\xi_k'' \in [x_{k-1}, x_k]$. Значит, $S(T) = \sum_{k=1}^{n} M_k \Delta x_k = \sum_{k=1}^{n} 1 \cdot \Delta x_k = 1$, $s(T) = \sum_{k=1}^{n} m_k \Delta x_k = \sum_{k=1}^{n} 0 \cdot \Delta x_k = 0$, то есть $S(T) - s(T) = 1$ для любого разбиения T отрезка $[0,1]$. Это означает, что функция Дирихле не интегрируема на этом отрезке (критерий Римана интегрируемости функции). Очевидно, что те же самые рассуждения справедливы для любого отрезка $[a,b]$ действительной оси.

2) $f(x)=\begin{cases}\operatorname{sgn}\sin(\pi/x), & x\in(0,1]\\ 0, & x=0\end{cases}$. Докажем, что эта функция интегрируема на отрезке $[0,1]$.

Очевидно, что $f(x)$ ограничена на $[0,1]$ и имеет разрывы в точках $x_0=0$ и $x_k=1/k$, $k=1,2,\ldots$. Выберем произвольное число $\varepsilon>0$. Тогда на интервале $\left(-\frac{\varepsilon}{4},\frac{\varepsilon}{4}\right)$ лежат точки $x_0,x_k,k>\frac{4}{\varepsilon}$, а на отрезке $\left[\frac{\varepsilon}{4},1\right]$ - конечное число точек разрыва: $x_1,\ldots,x_p$, где $p\le\frac{4}{\varepsilon}$, $p+1>\frac{4}{\varepsilon}$. Каждую из точек $x_i, i=1,\ldots,p$, покроем интервалом $\left(x_i-\frac{\varepsilon}{4p},x_i+\frac{\varepsilon}{4p}\right)$. Таким образом, все точки разрыва функции $f(x)$ на отрезке $[0,1]$ можно покрыть конечным числом интервалов, сумма длин которых равна $\frac{\varepsilon}{2}+p\cdot\frac{\varepsilon}{2p}=\varepsilon$. Это означает (теорема 2), что $f(x)$ интегрируема на этом отрезке.

3) Функция Римана $R(x)=\begin{cases}0, & x-иррациональное\\ 1/n, & x=m/n-рациональное\\ 1, & x=0\end{cases}$ интегрируема на отрезке $[0,1]$. Заметим, что эта функция ограничена и разрывна в каждой рациональной точке отрезка. Таким образом, теорема 2 к ней неприменима (рациональные точки отрезка $[0,1]$ нельзя покрыть никакой конечной системой интервалов с суммой длин, меньшей 1). Построим для функции Римана такое разбиение отрезка $[0,1]$, что разность между верхней и нижней суммами Дарбу этого разбиения будет меньше наперед заданного числа $\varepsilon>0$. Обозначим $N=\left[\frac{2}{\varepsilon}\right]+1$ (квадратные скобки здесь означают целую часть числа; таким образом, N - натуральное число). Выберем в качестве δ любое число, удовлетворяющее неравенствам $0<\delta<\frac{\varepsilon}{2N^2}$ (заметим, что выбор числа δ зависит только от ε). Пусть $T=\{x_0,x_1,\ldots,x_n\}$ - произвольное разбиение отрезка $[0,1]$, $\Delta_T<\delta$. Рассмотрим те отрезки $[x_{k-1},x_k]$ разбиения T, для которых $M_k-m_k>\frac{1}{N}$. Ясно, что каждый такой отрезок должен содержать хотя бы одну рациональную точку со знаменателем, меньшим числа N. Таким образом, количество этих отрезков не превосходит N^2. Тогда $S(T)-s(T)=\sum^{*}(M_k-m_k)\Delta x_k+\sum^{**}(M_k-m_k)\Delta x_k$.

Здесь первое слагаемое соответствует тем отрезкам разбиения $[x_{k-1},x_k]$, для которых $M_k-m_k\le\frac{1}{N}$, второе – тем, для которых $M_k-m_k>\frac{1}{N}$. Тогда $S(T)-s(T)\le\sum^{*}\frac{1}{N}\Delta x_k+\sum^{**}(1-0)\Delta x_k\le\frac{1}{N}\cdot 1+N^2\cdot\delta$ (здесь мы воспользовались тем, что точная верхняя грань функции Римана на отрезке $[0,1]$ равна 1, нижняя – 0; а также тем, что сумма длин части отрезков разбиения не превосходит суммы длин всех отрезков разбиения, то есть длины $[0,1]$). В силу выбора чисел N и δ получаем, что

$S(T) - s(T) < \dfrac{\varepsilon}{2} + N^2 \cdot \dfrac{\varepsilon}{2N^2} = \varepsilon$, то есть функция Римана является интегрируемой на отрезке $[0,1]$.

Свойства определенного интеграла. Оценки интегралов.

1) Пусть $f(x) \in R[a,b]$, $g(x) \in R[a,b]$, тогда $(f(x) \pm g(x)) \in R[a,b]$, причем $\int\limits_a^b (f(x) \pm g(x))dx = \int\limits_a^b f(x)dx \pm \int\limits_a^b g(x)dx$.

Доказательство. Для любого размеченного разбиения $V = \{x_0, x_1, \ldots, x_n;\ \xi_1, \ldots, \xi_n\}$ отрезка $[a,b]$ справедливо равенство: $\sum\limits_{k=1}^{n} (f(\xi_k) \pm g(\xi_k))\Delta x_k = \sum\limits_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k \pm \sum\limits_{k=1}^{n} g(\xi_k)\Delta x_k$. Отсюда предельным переходом получаем требуемое утверждение.

2) Если $f(x) \in R[a,b]$, то $(c \cdot f(x)) \in R[a,b]$, причем $\int\limits_a^b cf(x)dx = c\int\limits_a^b f(x)dx$.

Доказательство этого факта вытекает из соотношения $\sum\limits_{k=1}^{n} cf(\xi_k)\Delta x_k = c\sum\limits_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k$.

3) Если $f(x) \in R[a,b]$, $g(x) \in R[a,b]$, то $(f(x) \cdot g(x)) \in R[a,b]$.

Доказательство. Докажем сначала, что из того, что $f(x) \in R[a,b]$, следует, что $f^2(x) \in R[a,b]$. Действительно, функция $f(x)$ интегрируема на отрезке $[a,b]$; функция $\varphi(x) = x^2$, очевидно, удовлетворяет условию Липшица на отрезке $[m, M]$, где $M = \sup\limits_{a \le x \le b} f(x)$, $m = \inf\limits_{a \le x \le b} f(x)$ $\left(\left|x^2 - y^2\right| \le 2\max\{|m|, |M|\} \cdot |x - y|\right)$. Значит, функция $\varphi(f(x)) = f^2(x)$ интегрируема на $[a,b]$ по теореме об интегрируемости сложной функции.

Пусть теперь $f(x) \in R[a,b]$, $g(x) \in R[a,b]$. Тогда из соотношения $f(x) \cdot g(x) = \dfrac{1}{4}\left((f(x) + g(x))^2 - (f(x) - g(x))^2\right)$ и из свойства 1 сразу следует, что $(f(x) \cdot g(x)) \in R[a,b]$.

4) Пусть $f(x) \in R[a,b]$, $a \le c < d \le b$. Тогда $f(x) \in R[c,d]$.

Доказательство. Выберем произвольное число $\varepsilon > 0$. Тогда существует такое разбиение $T = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ - отрезка $[a,b]$, что $S(T) - s(T) < \varepsilon$. Пусть $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_l \le c < x_{l+1} < \ldots < x_m < \quad < d \le x_{m+1} < \ldots < x_n = b$; $T' = T \cup \{c, d\}$ - измельчение разбиения T. Тогда $S(T') - s(T') \le S(T) - s(T) < \varepsilon$. С другой стороны, $T'' = \{c, x_{l+1}, \ldots, x_m, d\}$- разбиение отрезка $[c,d]$, причем $S(T'') - s(T'') \le \ \le S(T') - s(T') < \varepsilon$ (поскольку $S(T') - s(T') = S(T'') - s(T'') + \sum\limits_{[x_{k-1}, x_k] \not\subset [c,d]} (M_k - m_k)\Delta x_k$ и второе слагаемое в сумме неотрицательно). Согласно критерию Римана интегрируемости функции на отрезке, это означает, что $f(x) \in R[c,d]$.

Определение 1. Если функция $f(x)$ определена в точке a, то по определению будем полагать $\int_a^a f(x)dx = 0$. Если $a < b$ и $f(x) \in R[a,b]$, то по определению $\int_b^a f(x)dx = -\int_a^b f(x)dx$.

5) Пусть $f(x) \in R[a,c]$ и $f(x) \in R[c,b]$, где $a < c < b$. Тогда $f(x) \in R[a,b]$ и $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$.

Доказательство. Возьмем произвольное число $\varepsilon > 0$. Пусть T' и T'' - разбиения отрезков $[a,c]$ и $[c,b]$ соответственно, такие, что $S(T') - s(T') < \frac{\varepsilon}{2}$, $S(T'') - s(T'') < \frac{\varepsilon}{2}$. Пусть $T = T' \cup T''$. Очевидно, что T - разбиение отрезка $[a,b]$, причем $S(T) - s(T) < \varepsilon$. Это означает, что $f(x) \in R[a,b]$.

Пусть теперь $V = \{x_0, x_1, \ldots, x_n;\ \xi_1, \ldots, \xi_n\}$ - размеченное разбиение отрезка $[a,b]$, содержащее точку c в качестве одной из точек разбиения x_k. Тогда $\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k = \sum_{[x_{k-1},x_k]\subset[a,c]} f(\xi_k)\Delta x_k + \sum_{[x_{k-1},x_k]\subset[c,b]} f(\xi_k)\Delta x_k$. Заметим, что при стремлении диаметра разбиения к нулю левая часть стремится к $\int_a^b f(x)dx$ (поскольку этот интеграл существует); первое слагаемое в правой части стремится к $\int_a^c f(x)dx$, второе – к $\int_c^b f(x)dx$.

Следствие. Пусть $f(x) \in R[A,B]$ и точки a,b,c лежат на отрезке $[A,B]$ (неважно, в каком порядке). Тогда $\int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx + \int_b^a f(x)dx = 0$.

Доказательство вытекает из свойства 5 и определения 1.

6) Пусть $f(x) \in R[a,b]$ и $f(x) \geq 0$ для любой точки $x \in [a,b]$. Тогда $\int_a^b f(x)dx \geq 0$.

Доказательство. Пусть $V = \{x_0, x_1, \ldots, x_n;\ \xi_1, \ldots, \xi_n\}$ - произвольное размеченное разбиение отрезка $[a,b]$. Тогда $\sigma(V) = \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k \geq 0$, следовательно, $I = \lim_{\Delta_V \to 0} \sigma(V) \geq 0$.

7) Пусть $f(x) \in R[a,b], g(x) \in R[a,b]$, $f(x) \geq g(x)$ для любой точки $x \in [a,b]$. Тогда $\int_a^b f(x)dx \geq \int_a^b g(x)dx$.

Доказательство. Так как функция $(f(x) - g(x)) \geq 0$ на $[a,b]$ и $(f(x) - g(x)) \in R[a,b]$ (как разность двух интегрируемых функций), то из предыдущего пункта следует, что $\int_a^b f(x)dx - \int_a^b g(x)dx = \ = \int_a^b (f(x) - g(x))dx \geq 0$.

8) Пусть функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a,b]$ и $f(x)\geq 0$ для любой точки $x\in[a,b]$. Пусть существует точка $x_0\in[a,b]$ такая, что $f(x_0)>0$. Тогда $\int\limits_a^b f(x)dx>0$.

Доказательство. Пусть $f(x_0)=\alpha>0$. Тогда существует число $\delta>0$ такое, что $f(x)\geq\dfrac{\alpha}{2}$ для любой точки $x\in[x_0-\delta,x_0+\delta]$ (свойство локального сохранения знака функцией, непрерывной в точке). Введем вспомогательную функцию $g(x)=\begin{cases}\alpha/2, & x\in[x_0-\delta,x_0+\delta]\\ 0, & x\notin[x_0-\delta,x_0+\delta]\end{cases}$. Очевидно, что $f(x)\geq g(x)$ для любой точки $x\in[a,b]$. Значит, по свойству 7, $\int\limits_a^b f(x)dx\geq\int\limits_a^b g(x)dx=2\delta\cdot\dfrac{\alpha}{2}>0$.

9) Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a,b]$, $f(x)\geq 0$ для любой точки $x\in[a,b]$ и $\int\limits_a^b f(x)dx=0$, то $f(x)\equiv 0$ на $[a,b]$.

Доказательство. Пусть функция $f(x)$ не равна тождественно нулю на отрезке $[a,b]$. Тогда существует точка $x_0\in[a,b]$ такая, что $f(x_0)>0$. Значит, $\int\limits_a^b f(x)dx>0$ (свойство 8).

10) Если $f(x)\in R[a,b]$, то $|f(x)|\in R[a,b]$ и $\left|\int\limits_a^b f(x)dx\right|\leq\int\limits_a^b|f(x)|dx$.

Доказательство. Так как для любых действительных чисел x и y справедливо неравенство $|x|-|y|\leq|x-y|$, то функция $\varphi(x)=|x|$ удовлетворяет условию Липшица с константой 1 на любом конечном отрезке. Это означает, что сложная функция $\varphi(f(x))=|f(x)|$ интегрируема на отрезке $[a,b]$. Так как $-|f(x)|\leq f(x)\leq|f(x)|$ для любой точки $x\in[a,b]$, то по свойству 7: $\int\limits_a^b\left(-|f(x)|\right)dx\leq\int\limits_a^b f(x)dx\leq\int\limits_a^b|f(x)|dx$. Из свойства 2 вытекает, что $\int\limits_a^b\left(-|f(x)|\right)dx=-\int\limits_a^b|f(x)|dx$, значит, $\left|\int\limits_a^b f(x)dx\right|\leq\int\limits_a^b|f(x)|dx$.

Лекция 4.

Теорема 1 (первая теорема о среднем значении). Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ интегрируемы на отрезке $[a,b]$ и пусть функция $g(x)\geq 0$ (≤ 0) для любой точки $x\in[a,b]$. Тогда, если $M=\sup\limits_{a\leq x\leq b}f(x)$, $m=\inf\limits_{a\leq x\leq b}f(x)$, то существует число $\mu\in[m,M]$ такое, что

(4.1) $$\int\limits_a^b f(x)g(x)dx=\mu\int\limits_a^b g(x)dx.$$

Если, кроме того, функция $f(x)$ непрерывна на $[a,b]$, то существует точка $\xi\in[a,b]$ такая, что

(4.2) $$\int\limits_a^b f(x)g(x)dx=f(\xi)\int\limits_a^b g(x)dx.$$

Доказательство. Пусть сначала $g(x) \geq 0$ на $[a,b]$. Так как $m \leq f(x) \leq M$ для любого $x \in [a,b]$, то, умножив последнее неравенство на $g(x)$, получим $mg(x) \leq f(x)g(x) \leq Mg(x)$ $\forall x \in [a,b]$. Поскольку произведение двух интегрируемых функций – интегрируемая функция (свойство 3) и знак неравенства сохраняется при взятии интеграла (свойство 7), то $\int_a^b mg(x)dx \leq \int_a^b f(x)g(x)dx \leq \int_a^b Mg(x)dx$. Заметим, что в крайней левой и в крайней правой частях неравенства константу можно вынести за знак интеграла:

(4.3) $$m\int_a^b g(x)dx \leq \int_a^b f(x)g(x)dx \leq M\int_a^b g(x)dx.$$

Если $\int_a^b g(x)dx = 0$, то из последнего неравенства вытекает, что $\int_a^b f(x)g(x)dx = 0$, и соотношение (4.1) справедливо для любого действительного числа μ. В противном случае $\int_a^b g(x)dx > 0$ (функция $g(x)$ неотрицательна на отрезке $[a,b]$, значит, и интеграл от нее ≥ 0). Тогда можем поделить неравенство (4.3) на $\int_a^b g(x)dx$: $m \leq \frac{\int_a^b f(x)g(x)dx}{\int_a^b g(x)dx} \leq M$. Обозначим $\mu = \frac{\int_a^b f(x)g(x)dx}{\int_a^b g(x)dx}$. Равенство (4.1) (в случае неотрицательной функции $g(x)$) доказано.

Если $g(x) \leq 0$ на $[a,b]$, то положим $g_1(x) = -g(x)$ $\forall x \in [a,b]$. Тогда $g_1(x) \geq 0$ на $[a,b]$ и, по уже доказанному, существует число $\mu \in [m,M]$ такое, что $\int_a^b f(x)g_1(x)dx = \mu\int_a^b g_1(x)dx$. Но $\int_a^b f(x)g_1(x)dx = \int_a^b f(x)(-g(x))dx = -\int_a^b f(x)g(x)dx$, $\int_a^b g_1(x)dx = \int_a^b (-g(x))dx = -\int_a^b g(x)dx$, значит, формула (4.1) справедлива и в этом случае.

Соотношение (4.2) сразу следует из (4.1) и из теоремы о прохождении непрерывной функции через любое промежуточное значение. Теорема полностью доказана.

Следствие. Пусть функция $f(x)$ интегрируема на отрезке $[a,b]$, $M = \sup\limits_{a \leq x \leq b} f(x)$, $m = \inf\limits_{a \leq x \leq b} f(x)$. Тогда существует число $\mu \in [m,M]$ такое, что

(4.1’) $$\int_a^b f(x)dx = \mu(b-a).$$

Если, кроме того, функция $f(x)$ непрерывна на $[a,b]$, то существует точка ξ из отрезка $[a,b]$ такая, что

(4.2’) $$\int_a^b f(x)dx = f(\xi)(b-a).$$

Доказательство. Нужно положить в формулах (4.1) и (4.2) $g(x) \equiv 1$.

Замечание. Число $M[f] = \dfrac{1}{b-a}\int\limits_a^b f(x)dx$ часто называют *средним значением* функции $f(x)$ на промежутке $[a,b]$.

Определение 2. Пусть функция $f(x)$ интегрируема на отрезке $[a,b]$, $x_0 \in [a,b]$. Функция $F(x) = \int\limits_{x_0}^{x} f(t)dt$, $a \le x \le b$, называется *интегралом с переменным верхним пределом* от функции $f(x)$ на $[a,b]$.

Теорема 2. Пусть функция $f(x)$ интегрируема на отрезке $[a,b]$, $x_0 \in [a,b]$. Тогда функция $F(x) = \int\limits_{x_0}^{x} f(t)dt$ непрерывна на $[a,b]$.

Доказательство. Так как $f(x)$ интегрируема на отрезке $[a,b]$, то она ограничена на нем. Значит, существует число $A > 0$ такое, что $|f(x)| \le A \quad \forall x \in [a,b]$. Возьмем произвольную точку $x \in [a,b]$. Пусть Δx - действительное число, достаточно малое, чтобы удовлетворять условию $x + \Delta x \in [a,b]$ (в случае $x = a$ нам нужно доказать только непрерывность функции $F(x)$ справа, и мы берем $\Delta x > 0$, в случае $x = b$: $\Delta x < 0$). Тогда $|F(x+\Delta x) - F(x)| = \left| \int\limits_{x_0}^{x+\Delta x} f(t)dt - \int\limits_{x_0}^{x} f(t)dt \right| = \left| \int\limits_{x}^{x+\Delta x} f(t)dt \right| \le \int\limits_{x_0}^{x+\Delta x} |f(t)|dt = \mu|\Delta x|$, где $\mu \in [0, A]$ (последнее равенство вытекает из следствия теоремы 1, т.к. функция $|f(x)|$ интегрируема на $[a,b]$). Значит, для любого достаточно малого числа Δx справедлива оценка: $|F(x+\Delta x) - F(x)| \le A|\Delta x|$. Это означает, что $|F(x+\Delta x) - F(x)| \xrightarrow[\Delta x \to 0]{} 0$, т.е. что функция $F(x)$ непрерывна в точке $x \in [a,b]$. Теорема доказана.

Теорема 3. Пусть функция $f(x)$ интегрируема на отрезке $[a,b]$, $x_0 \in [a,b]$. Если $f(x)$ непрерывна в точке $\xi \in [a,b]$, то функция $F(x) = \int\limits_{x_0}^{x} f(t)dt$ дифференцируема в точке ξ и $F'(\xi) = f(\xi)$.

Доказательство. Выберем произвольное число $\varepsilon > 0$. Так как функция $f(x)$ непрерывна в точке $\xi \in [a,b]$, то существует число $\delta > 0$ такое, что $f(\xi) - \varepsilon \le f(t) \le f(\xi) + \varepsilon$ для любой точки $t \in (\xi - \delta, \xi + \delta)$. Пусть сначала $\xi \ne b$. Выберем число Δx, $0 < \Delta x < \delta$, достаточно малое для того, чтобы отрезок $[\xi, \xi + \Delta x]$ целиком лежал внутри отрезка $[a,b]$. Тогда

$$\int\limits_{\xi}^{\xi+\Delta x} \frac{f(\xi) - \varepsilon}{\Delta x} dt \le \int\limits_{\xi}^{\xi+\Delta x} \frac{f(t)}{\Delta x} dt \le \int\limits_{\xi}^{\xi+\Delta x} \frac{f(\xi) + \varepsilon}{\Delta x} dt . \tag{4.4}$$

Проинтегрируем неравенство (4.4): $\frac{f(\xi)-\varepsilon}{\Delta x}\Delta x \le \frac{F(\xi+\Delta x)-F(\xi)}{\Delta x} \le \frac{f(\xi)+\varepsilon}{\Delta x}\Delta x$. Это означает, что при достаточно малых значениях $\Delta x > 0$ число $\frac{F(\xi+\Delta x)-F(\xi)}{\Delta x}$ принадлежит отрезку $\left[f(\xi)-\varepsilon, f(\xi)+\varepsilon\right]$.

Пусть теперь $\xi \ne a$, число Δx принадлежит интервалу $(-\delta, 0)$ и достаточно мало для того, чтобы отрезок $[\xi+\Delta x, \xi]$ принадлежал $[a,b]$. Тогда аналогично неравенству (4.4) имеем: $\int\limits_{\xi+\Delta x}^{\xi} \frac{f(\xi)-\varepsilon}{\Delta x} dt \ge \int\limits_{\xi+\Delta x}^{\xi} \frac{f(t)}{\Delta x} dt \ge \int\limits_{\xi+\Delta x}^{\xi} \frac{f(\xi)+\varepsilon}{\Delta x} dt$. Отсюда после интегрирования получаем, что $\frac{f(\xi)-\varepsilon}{\Delta x}(-\Delta x) \ge \frac{F(\xi)-F(\xi+\Delta x)}{\Delta x} \ge \frac{f(\xi)+\varepsilon}{\Delta x}(-\Delta x)$, т.е. снова число $\frac{F(\xi+\Delta x)-F(\xi)}{\Delta x}$ лежит на отрезке $\left[f(\xi)-\varepsilon, f(\xi)+\varepsilon\right]$.

Таким образом, мы доказали, что $\lim\limits_{\Delta x\to 0} \frac{F(\xi+\Delta x)-F(\xi)}{\Delta x}$ существует и равен $f(\xi)$ (в случае $\xi = a$ доказано существование предела справа, в случае $\xi = b$ - слева). Но по определению $\lim\limits_{\Delta x\to 0} \frac{F(\xi+\Delta x)-F(\xi)}{\Delta x} = F'(\xi)$. Теорема доказана.

Следствие. Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a,b]$, $x_0 \in [a,b]$, то функция $F(x) = \int\limits_{x_0}^{x} f(t)dt$ является одной из первообразных $f(x)$ на $[a,b]$.

Теорема 4 (формула Ньютона-Лейбница). Пусть функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a,b]$. Тогда $\int\limits_a^b f(t)dt = \Phi(b)-\Phi(a)$, где $\Phi(x)$ - любая из первообразных функции $f(x)$ на отрезке $[a,b]$.

Доказательство. Пусть $F(x) = \int\limits_a^x f(t)dt$. Так как $f(x)$ непрерывна на $[a,b]$, то по следствию из предыдущей теоремы получаем, что $F'(x) = f(x)$ для любого $x \in [a,b]$. Поскольку любые две первообразные одной и той же функции могут отличаться только на константу, то для произвольной первообразной $\Phi(x)$ функции $f(x)$ на $[a,b]$ справедливо соотношение $F(x) = \Phi(x) + C$. Тогда $\int\limits_a^b f(t)dt = F(b) = F(b) - F(a) = (\Phi(b)+C) - (\Phi(a)+C) = \Phi(b) - \Phi(a)$ (здесь мы использовали тот факт, что $F(a) = \int\limits_a^a f(t)dt = 0$). Теорема доказана.

Замечание. Необходимо отметить, что интегрируемость функции по Риману на некотором отрезке и существование у нее первообразной на этом отрезке, вообще говоря, не эквивалентны друг другу. Существуют функции, интегрируемые на отрезке, но не имеющие на нем первообразной, и наоборот, функции, имеющие первообразную, но не интегрируемые по Риману. Приведем соответствующие примеры.

1) Рассмотрим функцию $F(x)=x^2\sin\frac{1}{x^2}$. Она дифференцируема в каждой точке отрезка $[0,1]$. Вычислим ее производную: $f(x)=F'(x)=\begin{cases}0, & x=0\\ 2x\sin\frac{1}{x^2}-\frac{2}{x}\cos\frac{1}{x^2}, & 0<x\le 1\end{cases}$. Тогда очевидно, что функция $f(x)$ имеет на отрезке $[0,1]$ первообразную (функцию $F(x)$), но она не интегрируема по Риману на $[0,1]$, так как не ограничена на этом отрезке.

2) Рассмотрим функцию Римана $R(x)=\begin{cases}0, & x-\textit{иррациональное}\\ 1/n, & x=m/n-\textit{рациональное}\\ 1, & x=0\end{cases}$. Она интегрируема на отрезке $[0,1]$ (см. пример 3 занятия 3), но не имеет на этом отрезке первообразной. Докажем последнее утверждение. Пусть существует функция $F(x)$ такая, что $F'(x)=R(x)\ \ \forall x\in[0,1]$. Тогда функция $R(x)$ должна принимать все промежуточные значения между своим наибольшим и наименьшим значениями на отрезке $[0,1]$, т.е. между 0 и 1 (теорема Дарбу из первого семестра). Однако $R(x)$ принимает только значения вида $\frac{1}{n}$, где n - натуральное число. Значит, функция Римана не может являться производной никакой функции $F(x)$, т.е. не имеет первообразной.

Определение 3. Будем говорить, что функция $f(x)$ *непрерывно дифференцируема на отрезке* $[a,b]$, если ее производная $f'(x)$ существует и непрерывна в каждой точке интервала (a,b) и существуют конечные пределы $\lim\limits_{x\to a+0} f'(x)$ и $\lim\limits_{x\to b-0} f'(x)$.

Теорема 5 (замена переменной в определенном интеграле). Пусть функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a,b]$; функция $x=g(t)$ непрерывно дифференцируема на отрезке $[\alpha,\beta]$, где $\min\limits_{\alpha\le t\le\beta} g(t)=a$, $\max\limits_{\alpha\le t\le\beta} g(t)=b$, причем $g(\alpha)=a$, $g(\beta)=b$. Тогда $\int\limits_a^b f(x)dx=\int\limits_\alpha^\beta f(g(t))g'(t)dt$.

Доказательство. Пусть $\Phi(x)$ - любая из первообразных функции $f(x)$ на отрезке $[a,b]$. Тогда $(\Phi(g(t)))'=\Phi'(g(t))g'(t)=f(g(t))g'(t)$ для любого t из отрезка $[\alpha,\beta]$. Отсюда по формуле Ньютона-Лейбница

$\int\limits_\alpha^\beta f(g(t))g'(t)dt=\Phi(g(\alpha))-\Phi(g(\beta))=\Phi(b)-\Phi(a)=\int\limits_a^b f(x)dx$. Теорема доказана.

Теорема 6 (интегрирование по частям). Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ непрерывно дифференцируемы на отрезке $[a,b]$. Тогда $\int\limits_a^b f(x)g'(x)dx=f(x)g(x)\Big|_a^b-\int\limits_a^b f'(x)g(x)dx$, где $f(x)g(x)\Big|_a^b=f(b)g(b)-f(a)g(a)$.

Доказательство. По правилу дифференцирования произведения имеем: $(f(x)g(x))'=f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$. Значит, $\int\limits_a^b (f(x)g(x))'dx=\int\limits_a^b f(x)g'(x)dx+\int\limits_a^b f'(x)g(x)dx$. Но функция $f(x)g(x)$, очевидно, является первообразной для $(f(x)g(x))'$ на отрезке $[a,b]$

Значит, по формуле Ньютона-Лейбница $\int\limits_a^b (f(x)g(x))'dx = f(b)g(b) - f(a)g(a)$. Теорема доказана.

Следствие (формула Тейлора с остаточным членом в интегральной форме). Пусть функция $f(x)$ $n+1$ раз непрерывно дифференцируема в ε-окрестности точки a. Тогда для любой точки x из этой окрестности:

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \frac{1}{n!}\int\limits_a^x f^{(n+1)}(t)(x-t)^n\,dt.$$

Доказательство. Применим к интегралу $\frac{1}{n!}\int\limits_a^x f^{(n+1)}(t)(x-t)^n\,dt$ формулу интегрирования по частям: $\frac{1}{n!}\int\limits_a^x f^{(n+1)}(t)(x-t)^n\,dt = \frac{1}{n!}\int\limits_a^x (x-t)^n\,df^{(n)}(t) = \frac{f^{(n)}(t)}{n!}(x-t)^n\Big|_a^x +$
$+\frac{1}{n!}\int\limits_a^x nf^{(n)}(t)(x-t)^{n-1}dt = -\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \frac{1}{(n-1)!}\int\limits_a^x f^{(n)}(t)(x-t)^{n-1}dt = -\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$
$-\frac{f^{(n-1)}(a)}{(n-1)!}(x-a)^{n-1} - \ldots - \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \int\limits_a^x f'(t)dt = -\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n - \frac{f^{(n-1)}(a)}{(n-1)!}(x-a)^{n-1} -$
$\ldots - \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + f(x) - f(a)$. Следствие доказано.

Теорема 7 (вторая теорема о среднем значении; без доказательства). Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ интегрируемы на отрезке $[a,b]$.

1) Если $g(x) \ge 0$ и не возрастает на $[a,b]$, то найдется такая точка $\xi \in [a,b]$, что $\int\limits_a^b f(x)g(x)dx = g(a)\int\limits_a^\xi f(x)dx$.
2) Если $g(x) \ge 0$ и не убывает на $[a,b]$, то найдется такая точка $\xi' \in [a,b]$, что $\int\limits_a^b f(x)g(x)dx = g(b)\int\limits_{\xi'}^b f(x)dx$.
3) Если $g(x)$ монотонна на $[a,b]$, то найдется такая точка $\xi'' \in [a,b]$, что $\int\limits_a^b f(x)g(x)dx = g(a)\int\limits_a^{\xi''} f(x)dx + g(b)\int\limits_{\xi''}^b f(x)dx$.

Несобственный интеграл.

Определение 1. Пусть a - произвольное действительное число, и пусть функция $f(x)$ интегрируема на отрезке $[a, A]$ для любого числа $A > a$. Обозначим $F(A) = \int_a^A f(x)dx$. Выражение $\lim\limits_{A\to+\infty} F(A)$ называется *несобственным интегралом первого рода* функции $f(x)$ и обозначается $\int_a^{+\infty} f(x)dx$.

Замечание. Обычно, если этот предел существует и конечен, то говорят, что интеграл *сходится*, если он не существует или равен бесконечности, то выражение $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ понимают как символ и говорят, что интеграл *расходится*.

Аналогично $\int_{-\infty}^a f(x)dx = \lim\limits_{A\to-\infty} \int_A^a f(x)dx$ (если функция $f(x)$ интегрируема на отрезке $[A, a]$ для любого $A < a$);

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^a f(x)dx + \int_a^{+\infty} f(x)dx = \lim_{A'\to-\infty} \int_{A'}^a f(x)dx + \lim_{A''\to+\infty} \int_a^{A''} f(x)dx$$

для любого действительного числа a, причем интеграл $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$сходится в том и только в том случае, когда сходится каждый из интегралов в правой части.

Теорема 1 (замена переменной в несобственном интеграле). Пусть

1) функция $f(x)$ непрерывна на промежутке $[a, +\infty)$;

2) функция $x = g(t)$ определена, строго монотонна и непрерывно дифференцируема на промежутке $[\alpha, +\infty)$ (или на промежутке $(-\infty, \alpha]$);

3) множеством значений функции $g(t)$ является промежуток $[a, +\infty)$;

4) $g(\alpha) = a$.

Тогда $\int_a^{+\infty} f(x)dx = \int_\alpha^{+\infty} f(g(t))g'(t)dt$ (или $\int_a^{+\infty} f(x)dx = -\int_{-\infty}^\alpha f(g(t))g'(t)dt$).

Доказательство. Пусть $A > a$. Тогда функция $x = g(t)$ строго монотонна на отрезке $[\alpha, \beta]$ (или на отрезке $[\beta, \alpha]$), где β - действительное число, такое, что $g(\beta) = A$. Отсюда, применяя теорему о замене переменной в определенном интеграле, получим: $\int\limits_a^A f(x)dx = \int\limits_\alpha^\beta f(g(t))g'(t)dt \left(= -\int_\beta^\alpha f(g(t))g'(t)dt\right)$. Так как функция $g(t)$ строго монотонна, то $A \to +\infty$ тогда и только тогда, когда $\beta \to +\infty (\beta \to -\infty)$. Значит, переходя к пределу, имеем $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx = \int\limits_\alpha^{+\infty} f(g(t))g'(t)dt \left(= -\int_{-\infty}^\alpha f(g(t))g'(t)dt\right)$. Теорема доказана.

Теорема 2 (интегрирование по частям в несобственном интеграле). Пусть функции $f(x)$, $g(x)$ непрерывно дифференцируемы на промежутке $[a, +\infty)$ и пусть существует конечный предел $\lim\limits_{x\to+\infty} (f(x)g(x)) = L$. Тогда из сходимости одного из интегралов $\int_a^{+\infty} f(x)g'(x)dx$ или $\int_a^{+\infty} f'(x)g(x)dx$ следует сходимость второго и равенство $\int_a^{+\infty} f(x)g'(x)dx = L - f(a)g(a) - \int_a^{+\infty} f'(x)g(x)dx$.

Доказательство. Из формулы интегрирования по частям в определенном интеграле следует, что для любого действительного числа $A > a$: $\int_a^A f(x)g'(x)dx = f(A)g(A) - f(a)g(a) - \int_a^A f'(x)g(x)dx$. Если существует предел при $A \to +\infty$ одной из частей последнего равенства, то существует предел и второй, и они равны. Теорема доказана.

Пусть теперь функция $f(x)$ интегрируема на отрезке $[a, A]$ для любого $A > a$.

Теорема 3 (критерий Коши сходимости несобственного интеграла). Интеграл $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ сходится тогда и только тогда, когда для любого числа $\varepsilon > 0$ найдется число $B = B(\varepsilon) > 0$ такое, что для любых чисел $A_1, A_2 > B$ выполнено: $\left|\int_{A_1}^{A_2} f(x)dx\right| < \varepsilon$.

Доказательство. Пусть $F(A) = \int_a^A f(x)dx$. Тогда по критерию Коши существования предела функции в точке функция $F(A)$ имеет предел в точке $+\infty$тогда и только тогда, когда для любого $\varepsilon > 0$ найдется число $B = B(\varepsilon) > 0$ такое, что для любых $A_1, A_2 > B$ выполнено: $|F(A_1) - F(A_2)| < \varepsilon$. Теорема доказана.

Теорема 4 (признак сравнения). Если интеграл$\int_a^{+\infty} g(x)dx$ сходится и для любого $x \geq a$ имеем: $|f(x)| \leq g(x)$, то $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ сходится.

Доказательство. Так как $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ сходится, то, согласно критерию Коши, для любого $\varepsilon > 0$ найдется число $B = B(\varepsilon) > 0$ такое, что для любых $A_1, A_2 > B$ выполняется: $\left|\int_{A_1}^{A_2} f(x)dx\right| \leq \int_{A_1}^{A_2}|f(x)|dx \leq \int_{A_1}^{A_2} g(x)dx = \left|\int_{A_1}^{A_2} g(x)dx\right| < \varepsilon$. Это означает, что $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ сходится. Теорема доказана.

Следствие. Если интеграл $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ расходится и для любого $x \geq a$ имеем: $0 \leq g(x) \leq f(x)$, то интеграл $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ расходится.

Определение 2. Говорят, что интеграл $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ *сходится абсолютно*, если сходится интеграл $\int_a^{+\infty}|f(x)|dx$, и *сходится условно*, если он сходится, а интеграл $\int_a^{+\infty}|f(x)|dx$ расходится.

Замечание. Если интеграл сходится абсолютно, то он сходится (теорема 4).

Теорема 5 (признак Абеля-Дирихле сходимости несобственного интеграла). Пусть

1) функция $f(x)$ непрерывна на промежутке $[a, +\infty)$ и существует постоянная $C > 0$ такая, что $|F(A)| = \left|\int_a^A f(x)dx\right| \leq C$ для любого $A > a$;

2) функция $g(x)$ монотонна на $[a, +\infty)$ и $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = 0$;

3) $g(x)$ непрерывно дифференцируема на $[a, +\infty)$.

Тогда $\int_a^{+\infty} f(x)g(x)dx$ сходится.

Доказательство. Пусть функция $g(x)$ не возрастает на $[a, +\infty)$ (случай, когда $g(x)$ не убывает, рассматривается аналогично). Тогда $g(x) \geq 0$, $g'(x) \leq 0$ для любого $x \in [a, +\infty)$ (так как $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = 0$). Выберем произвольное число $\varepsilon > 0$. Существует $B = B(\varepsilon) > 0$ такое, что $0 \leq g(x) < \frac{\varepsilon}{2C}$ для любого $x > B$. Отсюда и из формулы интегрирования по частям в определенном интеграле следует, что для любых чисел $A_1, A_2 > B$ выполняется: $\left|\int_{A_1}^{A_2} f(x)g(x)dx\right| = \left|F(x)g(x)\Big|_{A_1}^{A_2} - \int_{A_1}^{A_2} F(x)g'(x)dx\right| \leq$ $\leq |F(A_2)g(A_2) - F(A_1)g(A_1)| + \left|\int_{A_1}^{A_2} F(x)(-g'(x))dx\right|$. Применим к интегралу в правой части последнего неравенства первую теорему о среднем значении и получим: $\left|\int_{A_1}^{A_2} f(x)g(x)dx\right| \leq C(g(A_1) + g(A_2)) + C\int_{A_1}^{A_2}(-g'(x))dx$ $= C(g(A_1) + g(A_2)) + C(g(A_1) - g(A_2)) =$ $= 2Cg(A_1) < \varepsilon$. Это означает, что $\int_a^{+\infty} f(x)g(x)dx$ сходится (критерий Коши). Теорема доказана.

Замечание. 1) Сходимость интеграла в теореме 5, вообще говоря, не абсолютная.

2) Утверждение теоремы 5 остается справедливым и при более слабых условиях на функции $f(x)$ и $g(x)$. А именно, справедлива следующая теорема (без доказательства):

пусть функция $f(x)$ интегрируема на отрезке $[a, A]$ и существует постоянная $C > 0$ такая, что $|F(A)| = \left|\int_a^A f(x)dx\right| \le C$ для любого $A > a$; функция $g(x)$ монотонна на $[a, +\infty)$ и $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = 0$. Тогда интеграл $\int_a^{+\infty} f(x)g(x)dx$ сходится (вообще говоря, не абсолютно).

Пример. Исследуем на сходимость интеграл $I(\alpha) = \int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x^\alpha} dx$, $\alpha > 0$.

1) Если $\alpha > 1$, то $\left|\frac{\sin x}{x^\alpha}\right| \le \frac{1}{x^\alpha}$. Так как интеграл $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha} dx = \frac{1-\alpha}{x^{\alpha-1}}\Big|_1^{+\infty} = \alpha - 1$ при $\alpha > 1$, то интеграл $\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x^\alpha} dx$ сходится абсолютно (признак сравнения).

2) Если $0 < \alpha \le 1$, то функция $g(x) = \frac{1}{x^\alpha}$ непрерывно дифференцируема и монотонно стремится к нулю на $[1, +\infty)$, а функция $f(x) = \sin x$ имеет на этом промежутке ограниченную первообразную $F(A) = \int_1^A \sin x\, dx = \cos 1 - \cos A$. Значит, интеграл $\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x^\alpha} dx$ сходится по признаку Абеля-Дирихле.

Но $\left|\frac{\sin x}{x^\alpha}\right| \ge \frac{\sin^2 x}{x^\alpha} = \frac{1}{2x^\alpha} - \frac{\cos 2x}{2x^\alpha}$. Так как интеграл $\int_1^{+\infty} \frac{\cos 2x}{2x^\alpha} dx$ сходится при $\alpha > 0$ по признаку Абеля-Дирихле, а интеграл $\int_1^{+\infty} \frac{1}{2x^\alpha} dx$ расходится при $0 < \alpha \le 1$, то интеграл $\int_1^{+\infty} \left|\frac{\sin x}{x^\alpha}\right| dx$ расходится (признак сравнения). Значит, при $0 < \alpha \le 1$ интеграл $I(\alpha)$ сходится условно.

Ответ: $I(\alpha)$ сходится абсолютно при $\alpha > 1$ и сходится условно при $0 < \alpha \le 1$.

Определение 3. Пусть функция $f(x)$ определена на полуинтервале $[a, b)$ и не ограничена на нем. Если для любого $\alpha \in [a, b)$ функция $f(x)$ интегрируема на отрезке $[a, \alpha]$, то выражение $\lim\limits_{\alpha\to b-0} \int_a^\alpha f(x)dx$ называется *несобственным интегралом второго рода* от функции $f(x)$ на отрезке $[a, b]$ и обозначается $\int_a^b f(x)dx$. Если предел существует и конечен, то говорят, что интеграл *сходится*, в противном случае – *расходится*. Точка b называется *особой* точкой несобственного интеграла.

Аналогично $\int_a^b f(x)dx = \lim\limits_{\alpha\to a+0} \int_\alpha^b f(x)dx$ в случае, если a - особая точка.

Если особая точка c лежит внутри интервала (a, b), то $\int\limits_a^b f(x)dx = \int\limits_a^c f(x)dx + \int\limits_c^b f(x)dx =$ $\lim\limits_{\alpha'\to c-0} \int_a^{\alpha'} f(x)dx + \lim\limits_{\alpha''\to c+0} \int_{\alpha''}^b f(x)dx$, причем интеграл $\int_a^b f(x)dx$ сходится в том и только в том случае, когда оба предела в правой части существуют и конечны.

Замечание. Свойства интегралов второго рода аналогичны свойствам интегралов первого рода (интеграл второго рода $\int_a^b f(x)dx$ можно свести к интегралу первого рода, например, заменой $t = \frac{1}{b-x}$, если b - особая точка).

Определение 4. Число $l = \lim\limits_{A\to+\infty} \int_{-A}^A f(x)dx$ называется *главным значением* (в смысле Коши) интеграла $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ и обозначается $l = v.p. \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$.

Определение 5. Если c - особая точка несобственного интеграла второго рода, $c \in (a, b)$, то $v.p. \int_a^b f(x)dx = \lim\limits_{\delta\to 0+0} \left(\int_a^{c-\delta} f(x)dx + \int_{c+\delta}^b f(x)dx\right)$.

Замечание. Интеграл может не сходиться в обычном смысле, но сходиться в смысле главного значения. Например, пусть функция $f(x)$ определена всюду на действительной оси и $f(-x) = -f(x)$ для любого x. Тогда $v.p.\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \lim_{A\to+\infty}\left(\int_{-A}^{0} f(x)dx + \int_{0}^{A} f(x)dx\right) = \lim_{A\to+\infty}\left(\int_{A}^{0} f(-x)d(-x) + \int_{0}^{A} f(x)dx\right) = 0$, в то время как в обычном смысле интеграл $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ может и не сходиться (например, для функции $f(x) = x$).

Геометрические приложения определенного интеграла. Длина дуги кривой.

Определение 1. Пусть функции $\varphi(t)$ и $\psi(t)$ непрерывны на отрезке $[\alpha,\beta]$. Множество L всех точек (x,y) таких, что $x=\varphi(t)$, $y=\psi(t)$, $t\in[\alpha,\beta]$, называется *плоской кривой*. Аналогично *пространственной кривой* называется множество точек (x,y,z) таких, что $x=\varphi(t)$, $y=\psi(t)$, $z=\eta(t)$, $t\in[\alpha,\beta]$, где функции $\varphi(t)$, $\psi(t)$, $\eta(t)$ непрерывны на отрезке $[\alpha,\beta]$.

Определение 2. Точка $(x',y')\in L$ называется *кратной точкой* кривой L, если существуют два числа $t_1,t_2\in[\alpha,\beta]$, $t_1\neq t_2$, такие, что $\varphi(t_1)=\varphi(t_2)=x'$, $\psi(t_1)=\psi(t_2)=y'$. Точки кривой L, не являющиеся кратными, называются *простыми*. Если кривая L не имеет кратных точек (кроме, может быть, начала и конца), то она называется *простой кривой*. Если единственная кратная точка кривой L - точка (x',y') такая, что $\varphi(\alpha)=\varphi(\beta)=x'$, $\psi(\alpha)=\psi(\beta)=y'$, то L называется *простой замкнутой кривой*.

Если кривую L можно разбить на конечное число простых кривых, то есть существует разбиение отрезка $[\alpha,\beta]$ такое, что на любом отрезке разбиения $[t_{k-1},t_k]$ функции $\varphi(t)$ и $\psi(t)$ задают простую кривую, то L называется *параметризуемой кривой*.

Замечание. В определениях 1 и 2 можно положить $\alpha=-\infty$ и (или) $\beta=+\infty$. Тогда в определении 2 разбиение может быть и бесконечным (счетным).

Определение 3. Функция $\varphi(t)$, непрерывная на отрезке $[\alpha,\beta]$, называется *кусочно-линейной функцией* на этом отрезке, если существует разбиение $[\alpha,\beta]$ такое, что $\varphi(t)=a_kt+b_k$ на k-том отрезке разбиения $[t_{k-1},t_k]$. Здесь a_k,b_k - произвольные действительные числа.

Определение 4. Простая кривая l называется *ломаной линией*, если задающие ее функции $\varphi(t)$ и $\psi(t)$ являются кусочно-линейными. Ломаная состоит из отрезков, которые называются ее *звеньями*; концы этих отрезков называются *узлами* ломаной.
Пусть ломаная $l=A_1A_2\dots A_n$, где $A_1=(x_1,y_1)$, … , $A_n=(x_n,y_n)$. Тогда ее длина вычисляется по формуле: $|l|=\sum\limits_{k=2}^{n}\sqrt{(x_k-x_{k-1})^2+(y_k-y_{k-1})^2}$.

Определение 5. Ломаная l называется *вписанной* в кривую L, если ее начало и конец совпадают с началом и концом L и все ее узлы лежат на этой кривой.

Определение 6. Кривая L называется *спрямляемой*, если длины всех ломаных, вписанных в L, ограничены сверху. *Длиной* $|L|$ спрямляемой кривой L называется число $\sup\limits_{l}\{|l|\}$, где точная верхняя грань берется по всем возможным ломаным, вписанным в L.

Замечание. Пусть кривая L спрямляема. Можно выбрать другой способ параметризации, то есть сделать замену $t=f(s)$, где функция $f(s)$ непрерывна и строго монотонна на отрезке $[a,b]$, $f([a,b])=[\alpha,\beta]$. Тогда можно сказать, что кривая L задается функциями: $x=\varphi_1(s)=\varphi(f(s))$, $y=\psi_1(s)=\psi(f(s))$, $s\in[a,b]$. Очевидно, что длина L при этом не изменится.

Лемма 1. Пусть ломаная l_0 вписана в кривую L и соответствует разбиению T_0 отрезка $[\alpha,\beta]$; ломаная l_1 также вписана в кривую L и соответствует разбиению T_1 того же отрезка, причем $T_0 \subset T_1$. Тогда $|l_0| \le |l_1|$.

Доказательство. Пусть $l_0 = A_1 \dots A_k A_{k+1} \dots A_n$, $l_1 = A_1 \dots A_k A' A_{k+1} \dots A_n$. Так как $|A_k A_{k+1}| \le |A_k A'| + |A' A_{k+1}|$ (неравенство треугольника), то $|l_0| \le |l_1|$. Лемма 1 доказана.

Утверждение 1. Если спрямляемая кривая L представляет собой объединение кривых: $L = L_1 \cup L_2 \cup \dots \cup L_m$, то все кривые $L_1, L_2, \dots, L_m$ спрямляемы и $|L| = \sum_{i=1}^{m} |L_i|$.

Доказательство. Пусть кривая L задается функциями $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$, $t \in [\alpha,\beta]$; кривая L_1: $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$, $t \in [\alpha,\gamma]$; кривая L_2: $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$, $t \in [\gamma,\beta]$ (тогда $L = L_1 \cup L_2$). Пусть T_1 - разбиение отрезка $[\alpha,\gamma]$, l_1 - ломаная, соответствующая этому разбиению; T_2 - разбиение $[\gamma,\beta]$, ломаная l_2 соответствует T_2. Тогда $T = T_1 \cup T_2$ - разбиение отрезка $[\alpha,\beta]$; ломаная $l = l_1 \cup l_2$ соответствует разбиению T. Так как $|l| = |l_1| + |l_2|$, то $|l_1| \le |l|$, $|l_2| \le |l|$. Это означает, что длины ломаных, вписанных в кривые L_1 и L_2, ограничены сверху (например, длиной кривой L). Значит, L_1 и L_2 спрямляемы.
Обозначим через C точку кривой L с координатами $(\varphi(\gamma),\psi(\gamma))$. Выберем произвольное число $\varepsilon > 0$. Так как кривая L спрямляема, то существует ломаная l, вписанная в кривую L, такая, что $|l| > |L| - \varepsilon$. Добавим к узлам ломаной l точку C; получим ломаную l'. Из леммы 1 следует, что $|l'| \ge |l| > |L| - \varepsilon$. Очевидно, что $l = l_1 \cup l_2$, причем ломаная l_1 вписана в кривую L_1, l_2 - в L_2. Значит, $|l_1| + |l_2| = |l'| > |L| - \varepsilon$. Отсюда $|L_1| + |L_2| \ge |l_1| + |l_2| > |L| - \varepsilon$. Поскольку $\varepsilon > 0$ - произвольное число, то окончательно получаем:

$$|L_1| + |L_2| \ge |L|. \tag{1}$$

Докажем теперь неравенство с противоположным знаком. Снова выберем произвольное число $\varepsilon > 0$. Так как кривая L_1 спрямляема, то существует ломаная l_1, вписанная в кривую L_1, такая, что $|l_1| > |L_1| - \varepsilon/2$. Аналогично существует ломаная l_2, вписанная в кривую L_2, такая, что $|l_2| > |L_2| - \varepsilon/2$. Пусть $l = l_1 \cup l_2$. Тогда ломаная l вписана в кривую L, причем $|l| = |l_1| + |l_2| > |L_1| + |L_2| - \varepsilon$. Значит, $|L| > |L_1| + |L_2| - \varepsilon$. Отсюда в силу произвольности выбора числа ε получаем:

$$|L_1| + |L_2| \le |L|. \tag{2}$$

Из неравенств (1) и (2) следует, что $|L| = |L_1| + |L_2|$. Утверждение доказано.

Сформулируем еще одну вспомогательное утверждение, которое понадобится нам при доказательстве основной теоремы.

Лемма 2. Для любых действительных чисел a, b, c справедливо неравенство

$$\left|\sqrt{a^2+b^2} - \sqrt{a^2+c^2}\right| \le |b-c|. \tag{3}$$

Доказательство. Если $b^2 + c^2 = 0$, то неравенство очевидно. Пусть $b^2 + c^2 \ne 0$. Тогда имеет место следующая цепочка неравенств:

$$\left|\sqrt{a^2+b^2} - \sqrt{a^2+c^2}\right| = \frac{|b^2 - c^2|}{\sqrt{a^2+b^2} + \sqrt{a^2+c^2}} \le \frac{|b-c| \cdot |b+c|}{\sqrt{b^2} + \sqrt{c^2}} \le \qquad \le \frac{|b-c| \cdot (|b| + |c|)}{|b| + |c|} = |b-c|.$$

Лемма 2 доказана.

Теорема 1. Пусть функции $\varphi(t)$ и $\psi(t)$ непрерывно дифференцируемы на отрезке $[\alpha,\beta]$. Тогда кривая L: $x=\varphi(t)$, $y=\psi(t)$, $t\in[\alpha,\beta]$, спрямляема и

(4) $$|L|=\int_\alpha^\beta \sqrt{(\varphi'(t))^2+(\psi'(t))^2}\,dt.$$

Доказательство. Зафиксируем произвольное число $\varepsilon>0$. Так как функция $\psi'(t)$ непрерывна на отрезке $[\alpha,\beta]$, то она равномерно непрерывна на нем. Значит, существует число $\delta_1=\delta_1(\varepsilon)>0$ такое, что для любых точек $t',t''\in[\alpha,\beta]$, $|t'-t''|<\delta_1$, выполнено: $|\psi'(t')-\psi'(t'')|<\dfrac{\varepsilon}{4(\beta-\alpha)}$. Обозначим $f(t)=\sqrt{(\varphi'(t))^2+(\psi'(t))^2}$. Так как по условию теоремы функция $f(t)$ непрерывна на отрезке $[\alpha,\beta]$, то она интегрируема на этом отрезке и существует число $A=\int_\alpha^\beta f(t)dt$. Тогда, по определению интегрируемости функции, найдется число $\delta_2=\delta_2(\varepsilon)>0$ такое, что для любого размеченного разбиения V отрезка $[\alpha,\beta]$, $\Delta_V<\delta_2$, имеет место неравенство $|\sigma(V)-A|<\dfrac{\varepsilon}{4}$ (здесь $\sigma(V)$ - интегральная сумма для функции $f(t)$, соответствующая разбиению V).

Пусть $\delta=\min\{\delta_1,\delta_2\}$; $T=\{x_0,x_1,\ldots,x_n\}$ - произвольное разбиение отрезка $[\alpha,\beta]$, $\Delta_T<\delta$. Пусть l - ломаная, вписанная в кривую L и соответствующая разбиению T. Тогда

(5) $$|l|=\sum_{k=1}^n\sqrt{(\varphi(t_k)-\varphi(t_{k-1}))^2+(\psi(t_k)-\psi(t_{k-1}))^2}=\sum_{k=1}^n\sqrt{(\varphi'(\xi_k))^2+(\psi'(\eta_k))^2}\Delta t_k,$$

где $\xi_k,\eta_k\in[t_{k-1},t_k]$ (мы применили теорему Лагранжа к функциям $\varphi(t)$ и $\psi(t)$ на отрезке $[t_{k-1},t_k]$).

Значит, $|l|\le\sqrt{\sup\limits_{\alpha\le t\le\beta}(\varphi'(t))^2+\sup\limits_{\alpha\le t\le\beta}(\psi'(t))^2}\sum\limits_{k=1}^n\Delta t_k=\sqrt{\sup\limits_{\alpha\le t\le\beta}(\varphi'(t))^2+\sup\limits_{\alpha\le t\le\beta}(\psi'(t))^2}\cdot(\beta-\alpha)$. Мы доказали, что длины всех ломаных, вписанных в кривую L, ограничены сверху. Это означает, что кривая L спрямляема.

Перейдем к доказательству формулы для вычисления длины кривой. Согласно неравенству (3), имеем

$\left|\sqrt{(\varphi'(\xi_k))^2+(\psi'(\eta_k))^2}-\sqrt{(\varphi'(\xi_k))^2+(\psi'(\xi_k))^2}\right|\le|\psi'(\eta_k)-\psi'(\xi_k)|<\dfrac{\varepsilon}{4(\beta-\alpha)}$, так как $|\eta_k-\xi_k|\le\Delta t_k<\delta$. Пусть $V=V(T)=\{x_0,x_1,\ldots,x_n;\,\xi_1,\ldots,\xi_n\}$ - размеченное разбиение отрезка $[\alpha,\beta]$, $\Delta_V<\delta$. Значит, $|\sigma(V)-A|<\dfrac{\varepsilon}{4}$. Но $\sigma(V)=\sum\limits_{k=1}^n\sqrt{(\varphi'(\xi_k))^2+(\psi'(\xi_k))^2}\Delta t_k$.

Отсюда и из соотношения (5) получим, что $\big|\sigma(V)-|l|\big|\le\sum\limits_{k=1}^n\dfrac{\varepsilon}{4(\beta-\alpha)}\Delta t_k$ $=\dfrac{\varepsilon}{4(\beta-\alpha)}\sum\limits_{k=1}^n\Delta t_k=\dfrac{\varepsilon}{4}$. Следовательно,

(6) $$\big||l|-A\big|\le\big||l|-\sigma(V)\big|+|\sigma(V)-A|<\frac{\varepsilon}{2}.$$

(Заметим, что соотношение (6) доказано нами для произвольной ломаной l, соответствующей разбиению отрезка $[\alpha,\beta]$, диаметр которого меньше δ).

Так как по определению длины кривой $|L| = \sup_l\{|l|\}$, то существует ломаная l^*, вписанная в кривую L и такая, что $|l^*| > |L| - \frac{\varepsilon}{2}$. Пусть ломаная l^* соответствует разбиению T^* отрезка $[\alpha, \beta]$. Существует измельчение T' разбиения T^*, удовлетворяющее условию $\Delta_{T'} < \delta$. Пусть ломаная l' соответствует разбиению T', тогда $|l'| \ge |l^*| > |L| - \frac{\varepsilon}{2}$ (лемма 1) и, согласно неравенству (5), $\left||l'| - A\right| < \frac{\varepsilon}{2}$. Отсюда заключаем, что $\left||L| - A\right| < \varepsilon$. Но ε - произвольное положительное число, значит, $|L| = A$. Теорема доказана.

Следствие. 1) Если кривая L является графиком непрерывно дифференцируемой на отрезке $[a,b]$ функции $y = f(x)$, то эта кривая спрямляема и $|L| = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2}\,dx$ (для доказательства нужно положить в формуле (4) $\varphi(t) = t$, $\psi(t) = f(t)$, $t \in [a,b]$).

2) Если кривая L задана уравнением $r = r(\theta)$ в полярных координатах ($x = r(\theta)\cos\theta$, $y = r(\theta)\sin\theta$), причем функция $r(\theta)$ непрерывно дифференцируема на отрезке $[\theta_1, \theta_2]$, то эта кривая спрямляема и $|L| = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \sqrt{(r(\theta))^2 + (r'(\theta))^2}\,d\theta$ (так как $\varphi(\theta) = r(\theta)\cos\theta$, $\psi(\theta) = r(\theta)\sin\theta$, то $(\varphi'(\theta))^2 + (\psi'(\theta))^2 = = (r(\theta))^2 + (r'(\theta))^2$).

Замечание. Если L - пространственная кривая: $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$, $z = \eta(t)$, $t \in [\alpha, \beta]$, где функции $\varphi(t)$, $\psi(t)$, $\eta(t)$ непрерывно дифференцируемы на отрезке $[\alpha, \beta]$, то L спрямляема и ее длина вычисляется по формуле, аналогичной (4): $|L| = \int_\alpha^\beta \sqrt{(\varphi'(t))^2 + (\psi'(t))^2 + (\eta'(t))^2}\,dt$ (доказательство этого факта не вполне аналогично доказательству теоремы 1, поэтому данная формула не является следствием формулы (4)).

Площадь плоской области.

Определение 1. Рассмотрим множество R^2 всех точек плоскости. Пусть точка $x(x_0, y_0) \in R^2$. ε*-окрестностью* точки x называется множество
$U_\varepsilon(x) = \{(x, y) \in R^2 \mid (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 < \varepsilon^2\}$.

Пусть M - подмножество R^2. Точка $x \in M$ называется *внутренней* точкой множества M, если существует число $\varepsilon > 0$ такое, что $U_\varepsilon(x) \in M$. Точка x называется *внешней* точкой множества M, если существует число $\varepsilon > 0$ такое, что $U_\varepsilon(x) \in R^2 \setminus M$. Точка x называется *граничной* точкой множества M, если она не является ни внутренней, ни внешней его точкой. Совокупность всех граничных точек множества называется его *границей*.

Определение 2. Множество $M \subset R^2$ называется *открытым*, если все его точки – внутренние. Множество $M \subset R^2$ называется *замкнутым*, если множество $R^2 \setminus M$ открыто. Множество $M \subset R^2$ называется *ограниченным*, если существует число $R > 0$ такое, что $M \subset U_R(0)$.

Определение 3. *Плоской фигурой* называется любое ограниченное множество $F \subset R^2$.

Определение 4. *Простейшей* будем называть плоскую фигуру, состоящую из конечного числа прямоугольников со сторонами, параллельными координатным осям.

Обозначим площадь простейшей фигуры P через $\mu(P)$. Очевидно, что площади простейших фигур обладают следующими свойствами:

1) Если $P = P_1 \cup P_2$, $P_1 \cap P_2 = \varnothing$, то $\mu(P) = \mu(P_1) + \mu(P_2)$ (аддитивность);

2) если $P_1 = P_2$, то $\mu(P_1) = \mu(P_2)$ (инвариантность);

3) если $P_1 \subset P_2$, то $\mu(P_1) \le \mu(P_2)$ (монотонность);

4) $\mu(P) \ge 0$ для любой простейшей фигуры P (неотрицательность).

Определение 5. Пусть F - произвольная плоская фигура. Обозначим $\mu_*(F) = \sup\limits_{P \subset F}\{\mu(P)\}$ - *нижняя площадь* F; $\mu^*(F) = \inf\limits_{Q \supset F}\{\mu(Q)\}$ - *верхняя площадь* F, где точная верхняя грань берется по всем замкнутым простейшим фигурам P, вписанным в F ; точная нижняя грань – по всем открытым простейшим фигурам Q, описанным около F.

Замечание. 1) Точная верхняя грань существует, поскольку F - ограниченное множество, точная нижняя грань – в силу неотрицательности площадей простейших фигур.

2) Любую замкнутую фигуру можно представить в виде объединения открытой фигуры и ее границы. Очевидно, что площадь простейшей фигуры не зависит от того, открыта она или замкнута (так как площадь ее границы всегда равна 0). В дальнейшем, применяя определения верхней и нижней площади, не будем делать различий между открытыми и замкнутыми простейшими фигурами.

3) Так как площадь любой простейшей фигуры, вписанной в F, не превосходит площади любой простейшей, описанной около F, то всегда $\mu_*(F) \le \mu^*(F)$.

Определение 6. Плоская фигура F называется *квадрируемой*, если $\mu_*(F) = \mu^*(F)$. Число $\mu = \mu_*(F) = \mu^*(F)$ будем называть *площадью* квадрируемой фигуры F.

Лемма 1. Плоская фигура F квадрируема тогда и только тогда, когда для любого числа $\varepsilon > 0$ найдется простейшая фигура $P \subset F$ и простейшая фигура $Q \supset F$ такие, что $\mu(Q) - \mu(P) < \varepsilon$.

Доказательство. Докажем необходимость. Пусть фигура F квадрируема, тогда $\mu_*(F) = \mu^*(F)$. По определению точной грани для любого числа $\varepsilon > 0$ найдется простейшая фигура $P \subset F$ такая, что $\mu_*(F) - \dfrac{\varepsilon}{2} < \mu(P) \le \mu_*(F)$. Аналогично найдется простейшая фигура $Q \supset F$ такая, что $\mu^*(F) \le \mu(Q) < \mu^*(F) + \dfrac{\varepsilon}{2}$. Так как $\mu_*(F) = \mu^*(F) = \mu(F)$, то, учитывая полученные неравенства, имеем: $\mu(F) - \dfrac{\varepsilon}{2} < \mu(P) \le \mu(Q) < \mu(F) + \dfrac{\varepsilon}{2}$. Значит, $\mu(Q) - \mu(P) < \varepsilon$.

Теперь докажем достаточность. Пусть для любого числа $\varepsilon > 0$ найдутся простейшие фигуры $P \subset F$ и $Q \supset F$ такие, что $\mu(Q) - \mu(P) < \varepsilon$. Так как $\mu(P) \le \mu_*(F) \le \mu^*(F) \le \mu(Q)$, то $0 \le \mu_*(F) - \mu^*(F) \le \mu(Q) - \mu(P) < \varepsilon$. Но число $\varepsilon > 0$ произвольно, значения верхней и нижней площади фигуры F от него не зависят, значит, $\mu_*(F) = \mu^*(F)$. Лемма 1 доказана.

Лемма 2. Плоская фигура F квадрируема тогда и только тогда, когда для любого числа $\varepsilon > 0$ найдется квадрируемая фигура $P \subset F$ и квадрируемая фигура $Q \supset F$ такие, что $\mu(Q) - \mu(P) < \varepsilon$.

Доказательство. Необходимость сразу следует из леммы 1, так как любая простейшая фигура является квадрируемой. Докажем достаточность. Пусть для любого числа $\varepsilon > 0$ найдутся квадрируемые фигуры $P \subset F$ и $Q \supset F$ такие, что $\mu(Q) - \mu(P) < \frac{\varepsilon}{2}$. Так как фигуры P и Q квадрируемы, то для них, согласно предыдущей лемме, найдутся простейшие фигуры P' и Q' такие, что $P' \subset P$, $\mu(P) - \mu(P') < \frac{\varepsilon}{4}$, $Q' \supset Q$, $\mu(Q') - \mu(Q) < \frac{\varepsilon}{4}$. Тогда $P' \subset F \subset Q'$ и $\mu(Q') - \mu(P') < \mu(Q) + \frac{\varepsilon}{4} - \mu(P) + \frac{\varepsilon}{4} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$. Отсюда и из леммы 1 следует, что фигура F квадрируема. Лемма 2 доказана.

Определение 7. Пусть функция $y = f(x)$ непрерывна на отрезке $[a,b]$ и $f(x) \ge 0$ для любого $x \in [a,b]$. *Криволинейной трапецией* назовем плоскую фигуру, ограниченную графиком функции $y = f(x)$, прямыми $x = a$ и $x = b$, и отрезком оси Ox, заключенным между точками a и b.

Теорема 1. Криволинейная трапеция F квадрируема и

$$\mu(F) = \int_a^b f(x)dx.$$

Доказательство. Так как функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a,b]$, то она интегрируема на этом отрезке. Значит, для любого числа $\varepsilon > 0$ существует разбиение $T = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ отрезка $[a,b]$ такое, что $S(T) - s(T) < \varepsilon$, где $S(T),\ s(T)$ - соответственно верхняя и нижняя суммы Дарбу для функции $f(x)$, соответствующие разбиению T (критерий Римана интегрируемости функции на отрезке).

Рассмотрим простейшие фигуры P и Q, состоящие из прямоугольников со сторонами $[x_{k-1}, x_k]$; $[0, \inf\limits_{x_{k-1} \le x \le x_k} f(x)]$ и $[x_{k-1}, x_k]$; $[0, \sup\limits_{x_{k-1} \le x \le x_k} f(x)]$, $k = 1, \dots, n$, соответственно. Тогда очевидно, что $P \subset F \subset Q$, причем $\mu(P) = s(T)$, $\mu(Q) = S(T)$. Значит, $\mu(Q) - \mu(P) < \varepsilon$, то есть фигура F квадрируема (лемма 1). С другой стороны, так как $s(T) \le \int_a^b f(x)dx \le S(T)$ и $\mu(P) \le \mu(F) \le \mu(Q)$, то получаем, что для любого $\varepsilon > 0$ выполнено: $\left| \mu(F) - \int_a^b f(x)dx \right| < \varepsilon$. Так как площадь фигуры и интеграл от функции $f(x)$ по отрезку $[a,b]$ - числа, не зависящие от выбора ε, то из последнего неравенства следует, что $\mu(F) = \int_a^b f(x)dx$. Теорема доказана.

Определение 8. Пусть функция $r(\varphi)$ непрерывна на отрезке $[\alpha, \beta]$ и $r(\varphi) \ge 0$ для любого $\varphi \in [\alpha, \beta]$. *Криволинейным сектором* назовем плоскую фигуру, ограниченную кривой $r = r(\varphi)$, заданной в полярных координатах, и лучами $\varphi = \alpha$ и $\varphi = \beta$.

Теорема 2. Криволинейный сектор F - квадрируемая фигура и

$$\mu(F)=\frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta} r^2(\varphi)d\varphi .$$

Доказательство. Так как функция $r(\varphi)$ непрерывна на отрезке $[\alpha,\beta]$, то функция $\frac{1}{2}r^2(\varphi)$ интегрируема на этом отрезке. Значит, для любого числа $\varepsilon>0$ существует разбиение $T=\{\varphi_0,\varphi_1,\ldots,\varphi_n\}$ отрезка $[\alpha,\beta]$ такое, что $S(T)-s(T)<\varepsilon$, где $S(T)$, $s(T)$ - соответственно верхняя и нижняя суммы Дарбу для функции $\frac{1}{2}r^2(\varphi)$, соответствующие разбиению T.

Рассмотрим квадрируемые фигуры P и Q, состоящие из круговых секторов раствора $[\varphi_{k-1},\varphi_k]$ с радиусами $r_k=\inf\limits_{\varphi_{k-1}\le\varphi\le\varphi_k} r(\varphi)$ и $R_k=\sup\limits_{\varphi_{k-1}\le\varphi\le\varphi_k} r(\varphi)$, $k=1,\ldots,n$, соответственно. Тогда очевидно, что $P\subset F\subset Q$, причем $\mu(P)=\frac{1}{2}\sum\limits_{k=1}^{n} r_k^2\Delta\varphi_k=s(T)$, $\mu(Q)=\frac{1}{2}\sum\limits_{k=1}^{n} R_k^2\Delta\varphi_k=S(T)$. Значит, $\mu(Q)-\mu(P)<\varepsilon$, то есть фигура F квадрируема (лемма 2). С другой стороны, так как $s(T)\le\frac{1}{2}\int\limits_{\alpha}^{\beta} r^2(\varphi)d\varphi\le S(T)$ и $\mu(P)\le\mu(F)\le\mu(Q)$, то получаем, что для любого $\varepsilon>0$ выполнено: $\left|\mu(F)-\frac{1}{2}\int\limits_{\alpha}^{\beta} r^2(\varphi)d\varphi\right|<\varepsilon$. Значит, $\mu(F)=\frac{1}{2}\int\limits_{\alpha}^{\beta} r^2(\varphi)d\varphi$. Теорема доказана.

Объем тела в пространстве.

Определение 1. Рассмотрим множество R^3 всех точек трехмерного пространства. ε-*окрестностью* точки $x(x_0,y_0,z_0)\in R^3$ называется множество $U_\varepsilon(x)=\{(x,y,z)\in R^3 \mid (x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2<\varepsilon^2\}$. Понятия внутренней, внешней, граничной точки, а также открытого, замкнутого и ограниченного множества в R^3 полностью аналогичны соответствующим понятиям в R^2.

Определение 2. *Телом* называется любое ограниченное подмножество R^3.

Определение 3. *Простейшими* назовем тела, состоящие из конечного числа прямоугольных параллелепипедов со сторонами, параллельными координатным осям.

Определение 4. Пусть F - произвольное тело. *Верхним объемом* тела F называется число $\mu^*(F)=\inf\limits_{Q\supset F}\{\mu(Q)\}$; *нижним объемом* F - число $\mu_*(F)=\sup\limits_{P\subset F}\{\mu(P)\}$, где точная верхняя грань берется по всем замкнутым простейшим телам P, содержащимся в F; точная нижняя грань – по всем открытым простейшим телам Q, содержащим F.

Определение 5. Тело F называется *кубируемым*, если $\mu_*(F)=\mu^*(F)$. Число $\mu=\mu_*(F)=\mu^*(F)$ будем называть *объемом* кубируемого тела F.

Лемма 1. Тело F кубируемо тогда и только тогда, когда для любого числа $\varepsilon > 0$ найдется простейшее тело $P \subset F$ и простейшее тело $Q \supset F$ такие, что $\mu(Q) - \mu(P) < \varepsilon$.

Лемма 2. Тело F кубируемо тогда и только тогда, когда для любого числа $\varepsilon > 0$ найдется кубируемое тело $P \subset F$ и кубируемое тело $Q \supset F$ такие, что $\mu(Q) - \mu(P) < \varepsilon$.

Доказательства лемм 1 и 2 являются полностью аналогичными доказательствам лемм 1 и 2 для плоских фигур.

Определение 6. *Цилиндрическим телом* назовем тело, ограниченное цилиндрической поверхностью с образующими, параллельными некоторой оси, и двумя плоскостями, перпендикулярными этой оси. Эти плоскости в пересечении с цилиндрической поверхностью образуют плоские фигуры, которые называются *основаниями* цилиндрического тела; расстояние h между основаниями называется *высотой* этого тела.

Теорема 1. Если основанием цилиндрического тела F является квадрируемая фигура G, то тело F кубируемо и $\mu(F) = \mu(G) \cdot h$.

Доказательство. Так как фигура G квадрируема, то для любого числа $\varepsilon > 0$ найдутся простейшие фигуры P и Q такие, что $P \subset G \subset Q$ и $\mu(Q) - \mu(P) < \dfrac{\varepsilon}{h}$. Пусть F_P и F_Q - простейшие тела с основаниями P и Q соответственно и высотой h. Тогда $F_P \subset F \subset F_Q$ и $\mu(F_Q) - \mu(F_P) = h \cdot \mu(Q) - h \cdot \mu(P) < \varepsilon$. Значит, тело F кубируемо (лемма 1). С другой стороны, так как $\mu(P) \le \mu(G) \le \mu(Q)$, то $\mu(F_P) \le h \cdot \mu(G) \le \mu(F_Q)$. Но $\mu(F_P) \le \mu(F) \le \mu(F_Q)$ (поскольку $F_P \subset F \subset F_Q$), следовательно, $|\mu(F) - h \cdot \mu(G)| < \varepsilon$ для любого числа $\varepsilon > 0$. Из произвольности выбора ε заключаем, что $\mu(F) = \mu(G) \cdot h$. Теорема доказана.

Следствие. Пусть тело F представляет собой объединение цилиндрических тел F_k, $k = 1, \ldots, n$; причем любые два тела F_i и F_j, $i \ne j$, могут пересекаться только по основаниям (такие тела называют *ступенчатыми*). Тогда тело F кубируемо и $\mu(F) = \sum_{k=1}^{n} \mu(F_k)$.

Доказательство. Пусть $F = F_1 \cup F_2$. Выберем произвольное число $\varepsilon > 0$. Построим так же, как в теореме 1, простейшие тела F_{P_1}, F_{P_2}, F_{Q_1}, F_{Q_2} такие, что $F_{P_1} \subset F_1 \subset F_{Q_1}$, $F_{P_2} \subset F_2 \subset F_{Q_2}$, причем $\mu(F_{Q_1}) - \mu(F_{P_1}) < \dfrac{\varepsilon}{2}$, $\mu(F_{Q_2}) - \mu(F_{P_2}) < \dfrac{\varepsilon}{2}$. Пусть $F_P = F_{P_1} \cup F_{P_2}$, $F_Q = F_{Q_1} \cup F_{Q_2}$. Тогда F_P и F_Q - простейшие тела и $F_P \subset F \subset F_Q$. Заметим, что тела F_{P_1}, F_{P_2} могут пересекаться только по основанию; тела F_{Q_1}, F_{Q_2} могут пересекаться только по основанию. Отсюда $\mu(F_P) = \mu(F_{P_1}) + \mu(F_{P_2})$, $\mu(F_Q) = \mu(F_{Q_1}) + \mu(F_{Q_2})$. Значит, $\mu(F_Q) - \mu(F_P) < \varepsilon$, то есть тело F кубируемо.

С другой стороны, $\mu(F_P) \le \mu(F) \le \mu(F_Q)$, $\mu(F_P) \le \mu(F_1) + \mu(F_2) \le \mu(F_Q)$, следовательно, $\mu(F) = \mu(F_1) + \mu(F_2)$. Следствие доказано.

Теорема 2. Пусть функция $y = f(x)$ непрерывна на отрезке $[a,b]$; тело F образовано вращением криволинейной трапеции, ограниченной графиком функции $|f(x)|$, прямыми $x = a$, $x = b$ и отрезком $[a,b]$ оси Ox. Тогда тело F кубируемо и

$$\mu(F) = \pi\int_a^b f^2(x)dx .$$

Доказательство. Так как функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a,b]$, то функция $\pi \cdot f^2(x)$ интегрируема на этом отрезке. Значит, для любого числа $\varepsilon > 0$ существует разбиение $T = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ отрезка $[a,b]$ такое, что $S(T) - s(T) < \varepsilon$, где $S(T), s(T)$ - соответственно верхняя и нижняя суммы Дарбу для функции $\pi \cdot f^2(x)$, соответствующие разбиению T.

На каждом отрезке разбиения $[x_{k-1}, x_k]$ построим два прямоугольника с высотами $m_k = \inf\limits_{x_{k-1}\le x\le x_k} f(x)$ и $M_k = \sup\limits_{x_{k-1}\le x\le x_k} f(x)$, $k = 1,\ldots,n$. При вращении этих прямоугольников вокруг оси Ox получаются цилиндрические тела P_k и Q_k соответственно. Пусть $P = \sum\limits_{k=1}^{n} P_k$, $Q = \sum\limits_{k=1}^{n} Q_k$. Тогда очевидно, что $P \subset F \subset Q$, причем P и Q кубируемы (как ступенчатые тела) и $\mu(P) = \sum\limits_{k=1}^{n}\mu(P_k) = \sum\limits_{k=1}^{n}\pi \cdot m_k^2\Delta x_k$, $\mu(Q) = \sum\limits_{k=1}^{n}\mu(Q_k) = \sum\limits_{k=1}^{n}\pi \cdot M_k^2\Delta x_k$. Но $\sum\limits_{k=1}^{n}\pi \cdot m_k^2\Delta x_k = s(T)$, $\sum\limits_{k=1}^{n}\pi \cdot M_k^2\Delta x_k = S(T)$. Значит, $\mu(Q) - \mu(P) < \varepsilon$, то есть тело F кубируемо (лемма 2). С другой стороны, так как $s(T) \le \pi\int_a^b f^2(x)dx \le S(T)$ и $\mu(P) \le \mu(F) \le \mu(Q)$, то получаем, что для любого $\varepsilon > 0$ выполнено: $\left|\mu(F) - \pi\int_a^b f^2(x)dx\right| < \varepsilon$. Это означает, что $\mu(F) = \pi\int_a^b f^2(x)dx$. Теорема доказана.

14 Метод хорд и его обоснование.

Сказать, что перед нами стоит задача нахождения корня нуля функции на отрезке. Предполагаем, что функция монотонная и непрерывная. То есть у нее один ноль. Как его найти? Сформулировать и доказать леммы об итерационной последовательности. Требуем, чтобы производная была монотонна и отделена от нуля. Тогда возможно 4 варианта. Рассмотрим один. Далее теорему и оценку

Постановка задачи: найти приближенно корень ур-я $f(x)=0$ (1) на $[a,b]$; $f\in C[a,b]$, $f(a)\cdot f(b)<0$.

- Если f строго монотонна, можно делением отрезка пополам. Погрешность на n-м шаге: $\frac{b-a}{2^n}$.

При дополнительных усл-ях на функцию — более тонкие методы.

Идея: перейти к эквивалентному ур-ю

$$F(x)=x \quad (2)$$

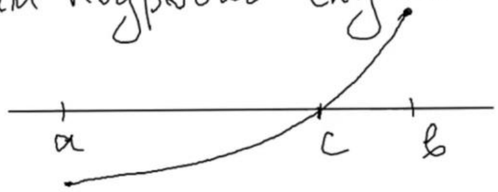
Опр. 1 Послед-ть $\{x_n\}_{n=0}^{+\infty}$ наз-ся итерационной послед-тью, построенной по ф-ции F, если все x_n лежат в области опред-я F ($x_n\in D(F)$, $n=0,1,\dots$) и $x_n=F(x_{n-1})$, $n\in\mathbb{N}$.

Опр. 1 Послед-ть $\{x_n\}_{n=0}^{+\infty}$ наз-ся итерационной послед-тью, построенной по ф-ции F, если все x_n лежат в области опред-я F ($x_n\in D(F)$, $n=0,1,\dots$) и (*) $x_n=F(x_{n-1})$, $n\in\mathbb{N}$.

Лемма 1. Пусть $F\in C[a,b]$; $x_n\in[a,b]$, $n=0,1,\dots$. Если $\exists \lim\limits_{n\to+\infty} x_n=c$, то c — корень ур-я (2) (т.е. $c=F(c)$).

Д-во: Если $x_n\xrightarrow[n\to+\infty]{} c$, то $x_{n-1}\xrightarrow[n\to+\infty]{} c$ $\Rightarrow$ $\lim\limits_{n\to+\infty}F(x_{n-1})=F(c)$ (в силу непр-ти F на $[a,b]$; $c\in[a,b]$, т.к. $a\le x_n\le b$). Значит, $c=F(c)$ (перешли к пределу в (*)). ч.т.д.

Пусть ф-ция f удовл-т условиям:
1) $f(a)\cdot f(b)<0$; 2) $f\in C^1[a,b]$;
3) $f'(x)\neq 0 \;\; \forall x\in[a,b]$; 4) f' монотонна на $[a,b]$.
Таким образом, возможны 4 случая:
а) $f'(x)>0$ и $\nearrow$; б) $f'(x)>0$ и $\searrow$;
в) $f'(x)<0$ и $\nearrow$; г) $f'(x)<0$ и $\searrow$.
Рассмотрим подробно случай а). В этом случае f возр-т на $[a,b]$; $f(a)<0$, $f(b)>0$.



Метод хорд

Положим
$$F(x):=\begin{cases} x-\dfrac{f(x)(b-x)}{f(b)-f(x)}, & a\le x<b \\ b-\dfrac{f(b)}{f'(b)}, & x=b.\end{cases}$$
Тогда $F\in C[a,b]$;
$F(x)=x \Leftrightarrow f(x)=0$
т.е. $\exists!\, c\in[a,b)$, т.ч. $f(c)=0$ и $F(c)=c$.

Т.1 Пусть $\{x_n\}$ – итерац-я посл-ть, построенная по ф-ции F; $x_0=a$. Тогда $\exists \lim\limits_{n\to+\infty} x_n=c$, причем $f(c)=0$.

Д-во: покажем по индукции, что $x_n\in[a,c]$, где c – корень ур-я $f(x)=0$, и $\{x_n\}$ не убывает.

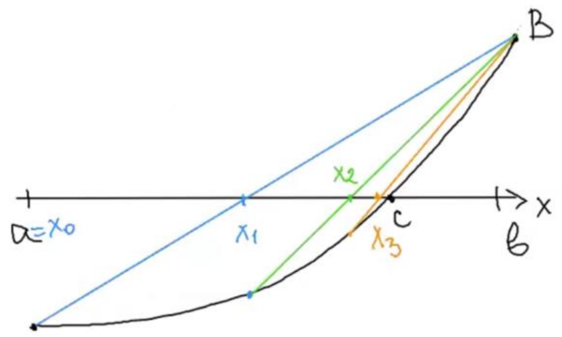
$$x_{n+1}=F(x_n)=x_n-\frac{f(x_n)(b-x_n)}{f(b)-f(x_n)}=x_n+\frac{(\overset{=0}{f(c)}-f(x_n))(b-x_n)}{\underbrace{f(b)-f(x_n)}_{f(b)-f(c)+f(c)-f(x_n)}}=$$
$$\underset{\text{т. Лагранжа}}{=} x_n+\frac{\overset{>0}{f'(\xi_n)}(c-x_n)(b-x_n)}{\underbrace{f'(\eta)}_{\ge f'(\xi_n)}(b-c)+f'(\xi_n)(c-x_n)} \le$$
$\xi_n\in(x_n;c)$
$\eta\in(c;b)$
$$\le x_n+\frac{\cancel{f'(\xi_n)}(c-x_n)\cancel{(b-x_n)}}{\cancel{f'(\xi_n)}\cancel{(b-c+c-x_n)}}=x_n+c-x_n=c.$$

Значит, если $x_n\le c$, то $x_{n+1}\le c$; $x_0=a\le c$ – верно.
(Если $x_n=c$, то $x_{n+1}=c$)

Далее, $x_{n+1}=x_n-\dfrac{\overset{<0}{f(x_n)}\,\overset{>0}{(b-x_n)}}{\underbrace{f(b)-f(x_n)}_{>0}}>x_n$
Пусть $x_n<c$

Д-ли, что $\{x_n\}$ монотонна и огр-на $\Rightarrow \exists \lim\limits_{n\to+\infty} x_n$. Из леммы 1 $\Rightarrow$ $x_n\to c$. ч.т.д.

Геометрический смысл метода хорд



Ур-е хорды, соединяющей точки $(x_n,\ f(x_n))$ и $(b, f(b))$:

$$\frac{x-x_n}{b-x_n} = \frac{y-f(x_n)}{f(b)-f(x_n)}$$

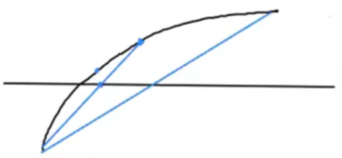
$$y=0 \Leftrightarrow x = x_n - \frac{f(x_n)(b-x_n)}{f(b)-f(x_n)} = F(x_n) = x_{n+1}$$

То есть x_{n+1} – абсцисса точки пересеч-я хорды с осью Ox

Замеч-е: случай г) ($f'<0$ и ↓) рассм-ся аналогично;

в случаях б), в) нужно взять $F(x)=\begin{cases} x-\dfrac{f(x)(x-a)}{f(x)-f(a)}, & a<x\le b\\ a-\dfrac{f(a)}{f'(a)}, & x=a\end{cases}$

$x_0=b$



15 Метод касательных и его обоснование.

Сказать, что перед нами стоит задача нахождения корня нуля функции на отрезке. Предполагаем, что функция монотонная и непрерывная. То есть у нее один ноль. Как его найти? Сформулировать и доказать леммы об итерационной последовательности. Требуем, чтобы производная была монотонна и отделена от нуля. Тогда возможно 4 варианта. Рассмотрим один. Далее теорему и оценку

Метод касательных (метод Ньютона)

Положим $F(x) = x - \dfrac{f(x)}{f'(x)}$, $x\in[a,b]$.

Тогда $F\in C[a,b]$; ур-е $f(x)=0 \Leftrightarrow F(x)=x$.

Т.2 Пусть $x_0=b$; $x_n = F(x_{n-1})$, $n\in\mathbb{N}$. Тогда $\exists \lim\limits_{n\to+\infty} x_n = c$, где $f(c)=0$.

Д-во: покажем, что $x_n\in[c,b]$ и $\{x_n\}$ не возр-т.

$x_0=b>c$ – верно. Пусть $x_n>c$, тогда

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = x_n - \frac{f(x_n)-\underbrace{f(c)}_{=0}}{f'(x_n)} = x_n - \frac{f'(\xi_n)(x_n-c)}{f'(x_n)}$$

$0< f'(\xi_n) \le f'(x_n)$, $f'(x_n)>0$

т. Лагранжа, $\xi_n\in(c;x_n)$

$\geq$ $x_n - \dfrac{\cancel{f'(x_n)}(x_n - c)}{\cancel{f'(x_n)}} = x_n - x_n + c = c$, т.е. $x_{n+1} \geq c$.

Если $x_n = c$, $x_{n+1} = x_n = c$.

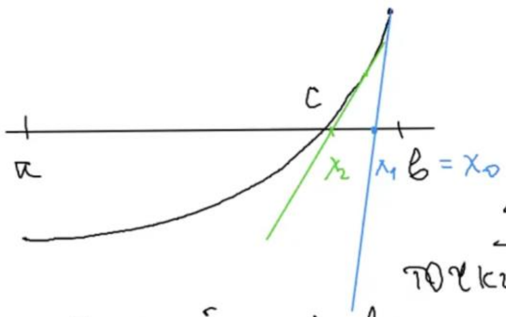
Далее, $x_{n+1} = x_n - \dfrac{\overbrace{f(x_n)}^{>0}}{\underbrace{f'(x_n)}_{>0}} < x_n$.

Пусть $x_n > c$

Д-ли, что $\{x_n\}$ монотонна и огр-на $\Rightarrow$ сходится.

В силу леммы 1: $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = c$. ч.т.д.

Геометрический смысл метода Ньютона



Ур-е касат-й в точке $(x_n; f(x_n))$

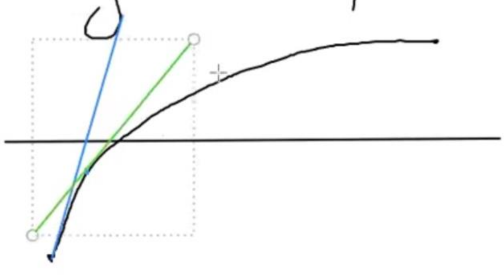
$$y = f'(x_n)(x - x_n) + f(x_n)$$

$$y = 0 \Leftrightarrow x = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = $$

$$= F(x_n) = x_{n+1}.$$

Значит, x_{n+1} - абсцисса точки пересечения с осью Ox касательной, проведенной к графику f в точке $(x_n; f(x_n))$.

Замеч-е: Случай г) рассм-ся аналогично; в случаях б), в) нужно взять $x_0 = a$.



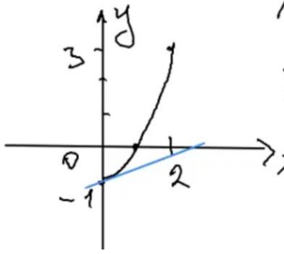
Оценка погрешности

$$f(x_n) = f(x_n) - \underbrace{f(c)}_{=0} = f'(\xi_n)(x_n - c)$$

$$\Rightarrow |x_n - c| = \left|\frac{f(x_n)}{f'(\xi_n)}\right| \le \frac{|f(x_n)|}{m}, \quad m = \inf_{a\le x\le b} |f'(x)|$$

Пример

$f(x) = x^2 - 1$, $x \in [0, 2]$



$x_0 = 2$ $\quad x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$

$x_1 = 2 - \frac{3}{4} = \frac{5}{4}$

$x_2 = \frac{5}{4} - \frac{9/16}{\frac{5}{2}} = \frac{5}{4} - \frac{9}{40} = \frac{41}{40}$

....

16 Приближенные методы вычисления определенных интегралов (для одного из методов вывести оценку погрешности)

3 метода. Идея, что можно заменить интеграл. Лемма. Подробно метод прямоугольника. Остальные геометрический смысл и оценки погрешности. Тейлор в интегральной форме(без доказательства)

Методы вычисления определенных интегралов

Пусть $f \in C[a,b]$.

Возьмем $x_1, \dots, x_n \in [a,b]$; $\lambda_1, \dots, \lambda_n > 0$.

Обозначим $C = \frac{\lambda_1 f(x_1) + \dots + \lambda_n f(x_n)}{\lambda_1 + \dots + \lambda_n}$ — усреднение значений $f(x_1), \dots, f(x_n)$.

Лемма 2 Если $f \in C[a,b]$, то $\exists \xi \in [a,b]$, т.ч. $f(\xi) = C$.

Д-во: Пусть $m = \inf_{a\le x\le b} f(x)$; $M = \sup_{a\le x\le b} f(x)$. Тогда $m \le f(x_k) \le M$

Умножим нер-во на λ_1, потом на λ_2 и т.д. и сложим:

$$m(\lambda_1+\dots+\lambda_n) \le \lambda_1 f(x_1)+\dots+\lambda_n f(x_n) \le M(\lambda_1+\dots+\lambda_n)$$

$$\Rightarrow \quad m \le C \le M.$$

$f\in C[a,b] \Rightarrow \exists\, \xi \in [a,b]: \ f(\xi)=C.$ ч.т.д.

Идея: $$\int_a^b f(x)\,dx \underset{\text{1-я т. о среднем}}{=} f(\eta)\cdot(b-a) \approx f(\xi)\cdot(b-a) = \underbrace{C}_{=\frac{\lambda_1 f(x_1)+\dots+\lambda_n f(x_n)}{\lambda_1+\dots+\lambda_n}}(b-a)$$

То есть $$\int_a^b f(x)\,dx = C\cdot(b-a) + R \text{ — остаток}$$

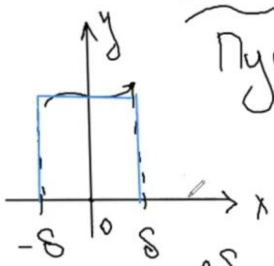
Цель: подобрать $x_1,\dots,x_n;\ \lambda_1,\dots,\lambda_n$, чтобы R был мал.

Лекция 12. Приближенные вычисления определенных интегралов.

$$\int_a^b f(x)\,dx = \underbrace{\frac{\lambda_1 f(x_1)+\dots+\lambda_n f(x_n)}{\lambda_1+\dots+\lambda_n}}_{=C}(b-a) + R, \qquad (1)$$

где $\lambda_1,\dots,\lambda_n>0;\ x_1,\dots,x_n\in[a,b]$.

Метод прямоугольников



Пусть $f\in C^2[a,b]$.

Рассмотрим сначала отрезок $[-\delta;\delta]$

Положим в ф-ле (1): $n=1$, $a=-\delta$, $b=\delta$; $x_1=0$, $\lambda_1=1$. Получим

$\int_{-\delta}^{\delta} f(x)\,dx = f(0)\cdot 2\delta + R$ и оценим остаток.

Пусть F — любая из первообр-х для f на $[a,b]$.

Тогда $$R=\int_{-\delta}^{\delta} f(x)\,dx - 2\delta\cdot f(0) = F(\delta)-F(-\delta) - 2\delta\cdot f(0).$$

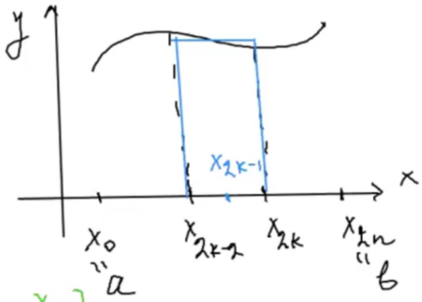
Введем вспомогательную ф-цию $\psi(x)=F(x)-F(-x)$, тогда $\psi'(x)=f(x)+f(-x)$. Разложим ψ по ф-ле Тейлора:

$$\underbrace{\psi(\delta)}_{F(\delta)-F(-\delta)} = \underbrace{\psi(0)}_{F(0)-F(0)=0} + \underbrace{\frac{\psi'(0)}{1!}}_{2f(0)}\delta + \underbrace{\frac{\psi''(0)}{2!}}_{f'(0)-f'(0)=0}\delta^2 + \underbrace{\frac{\psi'''(\xi)}{3!}\delta^3}_{\text{форма Лагранжа}}, \quad 0<\xi<\delta \Rightarrow$$

$$\Rightarrow R = \psi(\delta) - 2f(0)\cdot\delta = \frac{\psi'''(\xi)}{3!}\delta^3 = \frac{f''(\xi)+f''(-\xi)}{3!}\delta^3 =$$

$$= \underbrace{\frac{f''(\xi)+f''(-\xi)}{2}}_{\text{усреднение}}\cdot\frac{\delta^3}{3} \underset{\text{лемма 2 прошлой лекции}}{=} f''(\xi_1)\cdot\frac{\delta^3}{3}, \quad \xi_1\in[-\delta,\delta].$$

Вернемся к отрезку $[a,b]$. Разобьем его на n равных частей: $x_k = a + \frac{b-a}{2n}\cdot k$, $k=0,1,\dots,2n$, тогда $x_{2k}-x_{2k-2}=\frac{b-a}{n}$. Получаем:



$$\int_a^b f(x)\,dx = \sum_{k=1}^{n} \int_{x_{2k-2}}^{x_{2k}} f(x)\,dx =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} f(x_{2k-1})\cdot\frac{b-a}{n} + \tilde{R}, \text{ где}$$

$\xi_{2k-1}\in[x_{2k-2},x_{2k}]$

$$\tilde{R} = R_1+R_3+\dots+R_{2n-1} = \left(f''(\xi_1)+f''(\xi_3)+\dots+f''(\xi_{2n-1})\right)\cdot\left(\frac{b-a}{2n}\right)^3\cdot\frac{1}{3} =$$

усреднение

$$= \frac{f''(\xi_1)+\dots+f''(\xi_{2n-1})}{n}\cdot\frac{(b-a)^3}{24n^2} = f''(\xi)\cdot\frac{(b-a)^3}{24n^2} = O\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

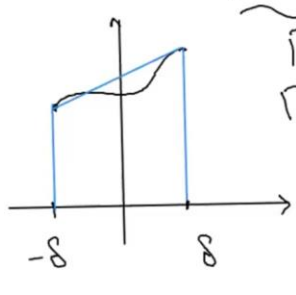
Лемма 1 (ф-ла Тейлора с ост. членом в интегральной форме)

Пусть f $(n+1)$ раз непрерывно диф-ма в $B_\varepsilon(a)$. Тогда $\forall x\in \mathring{B}_\varepsilon(a)$:

$$f(x)=f(a)+\frac{f'(a)}{1!}(x-a)+\dots+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n+\frac{1}{n!}\int_0^x f^{(n+1)}(t)(x-t)^n\,dt$$

Геометрический смысл: криволинейную трапецию на каждом из отрезков разбиения заменяем прямоуг-ком.

Метод трапеций



Пусть $f\in C^2[a,b]$.
Положим в ф-ле (1): $a=-\delta$, $b=\delta$; $n=2$, $x_1=-\delta$, $x_2=\delta$; $\lambda_1=\lambda_2=1$. Тогда

$$\int_{-\delta}^{\delta} f(x)\,dx = \frac{f(-\delta)+f(\delta)}{2}\cdot 2\delta + R$$

площадь трапеции

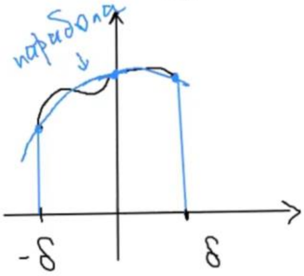
Геометрич. смысл: на каждом из отрезков разбиения заменяем криволинейную трапецию обычной.

$2n$

$$\tilde{R} = R_1+\dots+R_n = -\frac{2}{3}\cdot\left(\frac{b-a}{2n}\right)^3\left(f''(\xi_1)+\dots+f''(\xi_n)\right) =$$

$$= -\frac{f''(\tilde{\xi})}{12n^2}(b-a)^3 = O\left(\frac{1}{n^2}\right), \quad \tilde{\xi}\in[a,b]$$

Метод парабол (метод Симпсона)



Пусть $f \in C^4[a,b]$.

Положим в (1): $a=-\delta$, $b=\delta$; $n=3$, $x_1=-\delta$, $x_2=0$, $x_3=\delta$; $\lambda_1=\lambda_3=1$, $\lambda_2=4$.

Тогда
$$\int_{-\delta}^{\delta} f(x)\,dx = \frac{f(-\delta)+4f(0)+f(\delta)}{6}\cdot 2\delta + R$$

(проверьте!)

площадь крив-й трапеции, ограниченной параболой, прох-й через $(-\delta; f(-\delta))$, $(0; f(0))$ и $(\delta; f(\delta))$

$$\Rightarrow R = \underbrace{F(\delta)-F(-\delta)}_{=\psi(\delta)} - \frac{\delta}{3}\Big(\underbrace{4f(0)}_{=2\psi''(0)} + \underbrace{f(-\delta)+f(\delta)}_{=\psi''(\delta)}\Big).$$

$$+4\sum_{k=1}^{n} f(x_{2k-1})\Big) + \tilde{R}, \text{ где } \tilde{R} = R_1 + R_3 + \dots + R_{2n-1} =$$

$$= -\frac{f^{(4)}(\xi_1)+\dots+f^{(4)}(\xi_{2n-1})}{90}\cdot\left(\frac{b-a}{2n}\right)^5 = -\frac{f^{(4)}(\tilde{\xi})\cdot(b-a)^5}{2880\, n^4} = O\left(\frac{1}{n^4}\right)$$

$2880 = 32\cdot 90$

$\tilde{\xi} \in [a,b]$.

Лекция 14.
Пространство R^n.

Определение 1. Пространство R^n - *n-мерное действительное пространство* – это множество упорядоченных всех наборов $x = (x_1, \ldots, x_n)$, где $x_k \in R$, $k = 1, 2, \ldots, n$.

Числа x_k называются *координатами* точки (вектора) $x \in R^n$.

Из курса линейной алгебры известно, что пространство R^n - это линейное пространство относительно операций сложения: $x + y = (x_1 + y_1, \ldots, x_n + y_n)$, где $x = (x_1, \ldots, x_n)$, $y = (y_1, \ldots, y_n)$, и умножения на скаляр $\lambda \in R$: $\lambda x = (\lambda x_1, \ldots, \lambda x_n)$. Это пространство является евклидовым относительно скалярного произведения $(x, y) = x_1 y_1 + \ldots + x_n y_n$; в нем можно ввести норму: $\|x\| = (x, x) = \sqrt{(x_1)^2 + \ldots + (x_n)^2}$ и расстояние (метрику): $\rho(x, y) = \|x - y\| = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + \ldots + (x_n - y_n)^2}$.

Определение 2. *Открытым n-мерным шаром* радиуса R с центром в точке $x^0 = (x_1^0, \ldots, x_n^0)$ называется множество $B_R(x^0) = \{x \in R^n \mid \rho(x, x^0) < R\}$.

Замкнутым n-мерным шаром радиуса R с центром в точке x^0 называется множество $\overline{B}_R(x^0) = \{x \in R^n \mid \rho(x, x^0) \le R\}$.

Множество $S_R(x^0) = \{x \in R^n \mid \rho(x, x^0) = R\}$ называется *n-мерной сферой* радиуса R с центром в точке x^0.

Множество $\Pi_d(x^0) = \{x = (x_1, \ldots, x_n) \in R^n \mid |x_1 - x_1^0| < d_1, \ldots, |x_n - x_n^0| < d_n\}$, где $d_1 > 0, \ldots, d_n > 0$, называется *открытым n-мерным параллелепипедом* размера $d = (d_1, \ldots, d_n)$ с центром в точке x^0.

Определение 3. *ε-окрестностью* точки $x^0 \in R^n$ называется открытый шар радиуса $\varepsilon > 0$ с центром в точке x^0. Для обозначения ε-окрестности часто применяют специальное обозначение $B_\varepsilon(x^0)$ или просто $B(x^0)$. Множество $\overset{0}{B}_\varepsilon(x^0) = B_\varepsilon(x^0) \setminus \{x^0\}$ называется *проколотой ε-окрестностью* точки x^0. Понятия внутренней, внешней, граничной точки, а также открытого и замкнутого множества в R^n полностью аналогичны соответствующим понятиям в R^2 (см. занятие 6).

Точка x^0 называется *предельной* точкой множества $A \subset R^n$, если для любого числа $\varepsilon > 0$ найдется точка $x \in A$ такая, что $x \in \overset{0}{B}_\varepsilon(x^0)$.

Приведем несколько эквивалентных определений замкнутого множества (в дальнейшем мы сможем пользоваться тем из определений, которое нам будет удобно в данный момент).

Утверждение 1. Следующие утверждения эквивалентны:

1) Множество A замкнуто;
2) множество A содержит все свои предельные точки;
3) множество A содержит все свои граничные точки.

Доказательство. Докажем сначала следствие $1) \Rightarrow 2)$. Пусть точка $x^0 \in R^n \setminus A$. Тогда существует число $\varepsilon_0 > 0$ такое, что $B_{\varepsilon_0}(x^0) \subset R^n \setminus A$ (так как дополнение к замкнутому множеству открыто). Значит, $B_{\varepsilon_0}(x^0) \cap A = \varnothing$. Это означает, что точка x^0 не является предельной точкой множества A (поскольку в любой окрестности предельной точки должен содержаться хотя бы один элемент множества). Значит, A содержит все свои предельные точки.

$2)\Rightarrow 3)$. Пусть x^0 - граничная точка множества A. Тогда для любого $\varepsilon>0$ пересечение ε-окрестности точки x_0 с множеством A не пусто. Пусть $x^0\notin A$. Тогда получаем, что для любого $\varepsilon>0$: $\overset{0}{B_\varepsilon}(x^0)\cap A\neq\varnothing$. Это означает, что x^0 - предельная точка A. Но по условию множество A содержит все свои предельные точки. Мы пришли к противоречию. Значит, A должно содержать все свои граничные точки.

$3)\Rightarrow 1)$. Пусть точка $x^0\in R^n\setminus A$. Тогда x^0 - внешняя точка множества A (так как по условию A содержит все свои внутренние и граничные точки). Значит, существует число $\varepsilon_0>0$ такое, что $B_{\varepsilon_0}(x^0)\subset R^n\setminus A$ (по определению внешней точки). Это означает, что множество $R^n\setminus A$ открыто. Значит, множество A замкнуто. Утверждение полностью доказано.

Определение 4. Множество $A\subset R^n$ называется *ограниченным*, если существует число $R>0$ такое, что $A\subset B_R(0)$.

Определение 5. *Непрерывной кривой* в R^n называется множество $L=\{x=(x_1,\dots,x_n)\in R^n \mid x_1=\varphi_1(t),\dots,x_n=\varphi_n(t)\}$, где $t\in[\alpha,\beta]$ и все функции $\varphi_k(t)$ непрерывны на отрезке $[\alpha,\beta]$.

Говорят, что точки $x_1=(x_{11},\dots,x_{1n})$ и $x_2=(x_{21},\dots,x_{2n})$ *можно соединить непрерывной кривой*, если существуют такие функции $\varphi_k(t)$, $k=1,2,\dots,n$, непрерывные на отрезке $[\alpha,\beta]$, что $x_{11}=\varphi_1(\alpha),\dots,x_{1n}=\varphi_n(\alpha)$, $x_{21}=\varphi_1(\beta),\dots,x_{2n}=\varphi_n(\beta)$.

Определение 6. Множество $A\subset R^n$ называется *линейно связным*, если любые две точки этого множества можно соединить непрерывной кривой, целиком лежащей внутри A.

Областью называется открытое линейно связное множество.

Определение 7. Если каждому натуральному числу поставить в соответствие какую-либо точку пространства R^n, то полученное множество точек $x^1,x^2,\dots,x^m,\dots$ называется *последовательностью* точек R^n и обозначается $\{x^m\}_{m=1}^{\infty}$ или просто $\{x^m\}$.

Говорят, что последовательность $\{x^m\}$ *сходится*, если существует точка $a\in R^n$ такая, что для любого $\varepsilon>0$ найдется натуральное число $N=N(\varepsilon)$ такое, что для любого натурального $m\geq N$ выполнено: $\rho(x^m,a)<\varepsilon$. Точка a называется *пределом* последовательности. Обозначение: $\lim\limits_{m\to\infty}x^m=a$ или $x^m\xrightarrow[m\to\infty]{}a$.

Лемма 1. Последовательность $\{x^m\}$ сходится к точке $a=(a_1,\dots,a_n)$ тогда и только тогда, когда $x_1^m\xrightarrow[m\to\infty]{}a_1$, $\dots$, $x_n^m\xrightarrow[m\to\infty]{}a_n$, где $x^m=(x_1^m,\dots,x_n^m)$ (т.е. последовательность сходится тогда и только тогда, когда она сходится покоординатно).

Доказательство. Необходимость. Пусть $\lim\limits_{m\to\infty}x^m=a$. Значит, для любого $\varepsilon>0$ найдется $N=N(\varepsilon)$ такое, что для любого $m\geq N$ выполнено:

$\sqrt{(x_1^m - a_1)^2 + \ldots + (x_n^m - a_n)^2} < \varepsilon$. Тогда очевидно, что для любого $m \geq N$: $\left|x_1^m - a_1\right| < \varepsilon$, $\left|x_n^m - a_n\right| < \varepsilon$. Значит, $x_1^m \xrightarrow[m\to\infty]{} a_1$, …, $x_n^m \xrightarrow[m\to\infty]{} a_n$.

Достаточность. Пусть $x_1^m \xrightarrow[m\to\infty]{} a_1$, …, $x_n^m \xrightarrow[m\to\infty]{} a_n$. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ существует натуральное число $N_1 = N_1(\varepsilon)$ такое, что для любого $m \geq N_1$: $\left|x_1^m - a_1\right| < \dfrac{\varepsilon}{\sqrt{n}}$. И так далее. Наконец, существует $N_n = N_n(\varepsilon)$ такое, что для любого $m \geq N_n$: $\left|x_n^m - a_n\right| < \dfrac{\varepsilon}{\sqrt{n}}$. Пусть $N = \max\{N_1, \ldots, N_n\}$. Тогда для любого $m \geq N$ имеем: $\sqrt{(x_1^m - a_1)^2 + \ldots + (x_n^m - a_n)^2} < \sqrt{n \cdot \dfrac{\varepsilon^2}{n}} = \varepsilon$. Значит, $x^m \xrightarrow[m\to\infty]{} a$. Лемма 1 доказана.

Определение 8. Последовательность $\{x^m\}$ называется *фундаментальной*, если для любого $\varepsilon > 0$ существует натуральное число $N = N(\varepsilon)$ такое, что для любого натурального $m \geq N$ и для любого натурального p выполнено: $\rho(x^{m+p}, x^m) < \varepsilon$.

Лемма 2. Последовательность $\{x^m\}$ является фундаментальной тогда и только тогда, когда фундаментальна каждая из координатных последовательностей $\{x_1^m\}$, …, $\{x_n^m\}$.

Д-во: ($\Rightarrow$) Возьмем $\varepsilon > 0$, $k \in \{1, .., n\}$, тогда $\exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$, т.ч. $\forall m \geq N$, $\forall p \in \mathbb{N}$: $|x_k^m - x_k^{m+p}| \leq \rho(\vec{x}^{m+p}, \vec{x}^m) < \varepsilon$
$\Rightarrow \{x_k^m\}$ фунд-на.

($\Leftarrow$) Пусть $\varepsilon > 0$, $k \in \{1, .., n\} \Rightarrow \exists N_k(\varepsilon) \in \mathbb{N}$, т.ч. $\forall m \geq N_k$, $\forall p \in \mathbb{N}$: $|x_k^m - x_k^{m+p}| < \dfrac{\varepsilon}{\sqrt{n}}$. Пусть $N = \max\{N_1, .., N_n\}$, тогда $\forall m \geq N$: $\rho(\vec{x}^m, \vec{x}^{m+p}) < \varepsilon$. ч.т.д.

Теорема 1 (критерий Коши сходимости последовательности). Последовательность $\{x^m\}$ точек пространства R^n сходится тогда и только тогда, когда она является фундаментальной.

Доказательство. Последовательность фундаментальна тогда и только тогда, когда она фундаментальна покоординатно (лемма 2). Каждая из координатных последовательностей является обычной числовой последовательностью. Она сходится тогда и только тогда, когда она фундаментальна (критерий Коши сходимости числовой последовательности). Но последовательность точек R^n сходится тогда и только тогда, когда она сходится покоординатно (лемма 1). Значит, последовательность точек пространства R^n сходится тогда и только тогда, когда она является фундаментальной. Теорема доказана.

Определение 9. Последовательность $\{x^m\}$ точек пространства R^n *ограничена*, если существует число $R > 0$ такое, что $x^m \subset B_R(0)$ для любого натурального m.

Определение 10. Пусть $m_1 < m_2 < \ldots < m_k < \ldots$, где $m_1, m_2, \ldots, m_k, \ldots$ - натуральные числа. Последовательность $x^{m_1}, x^{m_2}, \ldots, x^{m_k}, \ldots$ называется *подпоследовательностью* последовательности $\{x^m\}$.

Теорема 2 (Больцано-Вейерштрасса). Из любой ограниченной последовательности $\{x^m\}$ точек пространства R^n можно выделить сходящуюся подпоследовательность.

Доказательство. Последовательность $\{x^m\}$ ограничена, значит, существует число $R > 0$ такое, что $\sqrt{(x_1^m)^2 + \ldots + (x_n^m)^2} < R$ для любого натурального m. Тогда очевидно, что для любого $m \geq N$: $\left|x_1^m\right| < R$, $\left|x_n^m\right| < R$, то есть числовые последовательности $\{x_1^m\}$, …, $\{x_n^m\}$ ограничены.

Выделим из последовательности $\{x_1^m\}$ сходящуюся подпоследовательность $\{x_1^{m_{k_1}}\}$, $x_1^{m_{k_1}} \xrightarrow[k_1 \to \infty]{} a_1$ (теорема Больцано-Вейерштрасса для числовых последовательностей). Рассмотрим последовательность $\{x_2^{m_{k_1}}\}$. Она ограничена (как подпоследовательность ограниченной последовательности), значит, из нее можно выделить сходящуюся подпоследовательность $\{x_2^{m_{k_2}}\}$, $x_2^{m_{k_2}} \xrightarrow[k_2 \to \infty]{} a_2$. И так далее. В конце концов, из последовательности $\{x_n^{m_{k_{n-1}}}\}$ выделим сходящуюся подпоследовательность $\{x_n^{m_{k_n}}\}$, $x_n^{m_{k_n}} \xrightarrow[k_n \to \infty]{} a_n$.

Рассмотрим последовательность $\{x^{m_{k_n}}\}$. Так как все последовательности ее координат сходятся: $x_1^{m_{k_n}} \xrightarrow[k_n \to \infty]{} a_1$, …, $x_n^{m_{k_n}} \xrightarrow[k_n \to \infty]{} a_n$, то сама последовательность также сходится к точке $a = (a_1, \ldots, a_n)$ (лемма 1). Теорема доказана.

Лекция 15.
Предел функции многих переменных.

Определение 1. Если каждой точке x из множества $X \subset \mathbb{R}^n$ ставится в соответствие по известному закону действительное число $f(x)$, то говорят, что на множестве X задана *функция n переменных* $f(x)$ (или $f(x_1,\dots,x_n)$). Множество X называется *областью определения* функции $f(x)$ и обозначается D_f.

Определение 2 (предел функции по Коши). Число $b \in \mathbb{R}$ называется *пределом функции* $f(x)$ *в точке* $a \in \mathbb{R}^n$, если для любого $\varepsilon > 0$ найдется число $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ такое, что для любой точки $x \in D_f$ такой, что $0 < \rho(x,a) < \delta$, выполнено: $|f(x) - b| < \varepsilon$.

Обозначения: $\lim\limits_{x \to a} f(x) = b$ или $\lim\limits_{\substack{x_1 \to a_1 \\ \dots \\ x_n \to a_n}} f(x_1,\dots,x_n) = b$.

Определение 3 (предел функции по Гейне). Число $b \in \mathbb{R}$ называется *пределом функции* $f(x)$ *в точке* $a \in \mathbb{R}^n$, если для любой последовательности аргументов $\{x^m\}$, $x^m \xrightarrow[m\to\infty]{} a$, $x^m \neq a$, соответствующая последовательность значений функции $f(x^m) \xrightarrow[m\to\infty]{} b$.

Доказательство эквивалентности определении по Коши и по Гейне проводится точно так же, как в одномерном случае.

Определение 4. Число $b \in \mathbb{R}$ называется *пределом функции* $f(x)$ *при* $x \to \infty$, если любого $\varepsilon > 0$ найдется число $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ такое, что для любой точки $x \in D_f$, $\|x\| > \delta$, выполнено: $|f(x) - b| < \varepsilon$.

Теорема 1. Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ заданы на множестве $X \subset \mathbb{R}^n$; $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b$, $\lim\limits_{x\to a} g(x) = c$. Тогда $\lim\limits_{x\to a}(f(x) \pm g(x)) = b \pm c$, $\lim\limits_{x\to a}(f(x)\cdot g(x)) = b\cdot c$, $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{b}{c}$ (если $c \neq 0$).

Доказательство. Рассмотрим последовательность $\{x^m\}$ точек множества X такую, что $x^m \xrightarrow[m\to\infty]{} a$, $x^m \neq a$. Тогда $f(x^m) \xrightarrow[m\to\infty]{} b$, $g(x^m) \xrightarrow[m\to\infty]{} c$ (определение предела по Гейне). В силу свойств числовых последовательностей получаем: $(f(x^m) \pm g(x^m)) \xrightarrow[m\to\infty]{} b \pm c$, $(f(x^m)\cdot g(x^m)) \xrightarrow[m\to\infty]{} b\cdot c$, $\dfrac{f(x^m)}{g(x^m)} \xrightarrow[m\to\infty]{} \dfrac{b}{c}$ (если $c \neq 0$). Отсюда и из определения предела функции по Гейне сразу следует утверждение теоремы.

Определение 5. Функция $f(x)$ *удовлетворяет условию Коши в точке* $a \in \mathbb{R}^n$ *(при $x \to \infty$)*, если для любого $\varepsilon > 0$ найдется число $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ такое, что для любых двух точек $x', x'' \in D_f$ таких, что $0 < \rho(x',a) < \delta$, $0 < \rho(x'',a) < \delta$ ($\|x'\| > \delta, \|x''\| > \delta$), выполнено: $|f(x') - f(x'')| < \varepsilon$.

Теорема 2 (критерий Коши существования предела функции многих переменных). Функция $f(x)$ имеет конечный предел в точке $a \in \mathbb{R}^n$ (при $x \to \infty$) тогда и только тогда, когда она удовлетворяет условию Коши в точке a (при $x \to \infty$).

Доказательство. Будем проводить доказательство для случая, когда $a \in \mathbb{R}^n$ (случай $a = \infty$ рассматривается аналогично).

Докажем сначала необходимость. Пусть $\lim\limits_{x \to a} f(x) = b$.

Зафиксируем число $\varepsilon > 0$. Тогда найдется $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ такое, что для любых точек $x', x'' \in D_f$, $0 < \rho(x', a) < \delta$, $0 < \rho(x'', a) < \delta$, выполнено: $\left| f(x') - b \right| < \dfrac{\varepsilon}{2}$, $\left| f(x'') - b \right| < \dfrac{\varepsilon}{2}$ (определение предела функции по Коши). Значит, $\left| f(x') - f(x'') \right| \le \left| f(x') - b \right| + \left| f(x'') - b \right| <$ $< \dfrac{\varepsilon}{2} + \dfrac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$, то есть в точке a выполнено условие Коши.

Теперь докажем достаточность. Пусть функция $f(x)$ удовлетворяет условию Коши в точке a. Выберем последовательность аргументов $\{x^m\}$ такую, что $x^m \xrightarrow[m \to \infty]{} a$, $x^m \ne a$. Пусть $\varepsilon > 0$ - произвольное число. Согласно критерию Коши, найдется такое $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, что для любых точек $x', x'' \in D_f$, $0 < \rho(x', a) < \delta$, $0 < \rho(x'', a) < \delta$, выполнено: $\left| f(x') - f(x'') \right| < \varepsilon$. Так как $x^m \xrightarrow[m \to \infty]{} a$, то существует натуральный номер N такой, что $0 < \rho(x^m, a) < \delta$ для любого $m \ge N$. Тем более, $0 < \rho(x^{m+p}, a) < \delta$ для любого натурального числа p и любого $m \ge N$. Значит, $\left| f(x^{m+p}) - f(x^m) \right| < \varepsilon$.

Мы показали, что для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое натуральное N, что для любого $m \ge N$, для любого натурального p выполнено: $\left| f(x^{m+p}) - f(x^m) \right| < \varepsilon$. Это означает в точности, что числовая последовательность $\{f(x^m)\}$ фундаментальна. Значит, она сходится (критерий Коши сходимости числовых последовательностей).

Осталось показать, что для любого выбора последовательности аргументов $\{x^m\}$ все последовательности значений функции $\{f(x^m)\}$ будут сходиться к одному и тому же числу. Пусть $x^m \xrightarrow[m \to \infty]{} a$, $x^m \ne a$, $y^m \xrightarrow[m \to \infty]{} a$, $y^m \ne a$; $f(x^m) \xrightarrow[m \to \infty]{} b$, $f(y^m) \xrightarrow[m \to \infty]{} c$. Рассмотрим последовательность аргументов $\{z^m\} = \{x^1, y^1, x^2, y^2, \ldots, x^m, y^m, \ldots\}$. Тогда очевидно, что $z^m \xrightarrow[m \to \infty]{} a$, $z^m \ne a$. Значит, по уже доказанному нами, существует число d такое, что $f(z^m) \xrightarrow[m \to \infty]{} d$. Но последовательности $\{f(x^m)\}$ и $\{f(y^m)\}$ являются подпоследовательностями последовательности $\{f(z^m)\}$ и должны сходиться к тому же пределу. Отсюда $b = c = d$. Теорема полностью доказана.

Определение 6. Функция $f(x)$ называется *бесконечно малой* в точке $a \in \mathbb{R}^n$, если $\lim\limits_{x \to a} f(x) = 0$. Обозначение: $f(x) = \bar{o}(1),\ x \to a$.

Определение 7. Пусть функция $f(x, y)$ определена в некоторой проколотой окрестности точки $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$. Если найдется такое $\varepsilon > 0$, что для любого числа $y \in \overset{0}{B_\varepsilon}(y_0)$ существует $\lim\limits_{x \to x_0} f(x, y) = \varphi(y)$ и существует $\lim\limits_{y \to y_0} \varphi(y) = b$, то говорят, что существует *повторный предел* $\lim\limits_{y \to y_0} \lim\limits_{x \to x_0} f(x, y) = b$.

Аналогично можно определить повторный предел $\lim\limits_{x \to x_0} \lim\limits_{y \to y_0} f(x, y)$.

Заметим, что существование повторных пределов функции в точке и существования ее предела как функции двух переменных (такой предел называют также *двойным*) не эквивалентны. Приведем соответствующие примеры.

Примеры. 1) Пусть $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{x^2+y^2}, & x^2+y^2\neq 0\\ 0, & x^2+y^2=0\end{cases}$. Если $y\neq 0$, то $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{xy}{x^2+y^2}=\dfrac{0\cdot y}{0+y^2}=0$, значит, $\lim\limits_{y\to 0}\lim\limits_{x\to 0} f(x,y)=0$. Аналогично $\lim\limits_{x\to 0}\lim\limits_{y\to 0} f(x,y)=0$. Покажем, что не существует $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f(x,y)$. Рассмотрим две последовательности: $\{(x_m,y_m)\}=\left\{\dfrac{1}{m},\dfrac{1}{m}\right\}$ и $\{(x'_m,y'_m)\}=\left\{\dfrac{1}{m},-\dfrac{1}{m}\right\}$. Тогда $\{(x_m,y_m)\}\xrightarrow[m\to\infty]{}(0,0)$, $\{(x'_m,y'_m)\}\xrightarrow[m\to\infty]{}(0,0)$, но $\{f(x_m,y_m)\}=\left\{\dfrac{1}{2}\right\}$, $\{f(x'_m,y'_m)\}=\left\{-\dfrac{1}{2}\right\}$, то есть для различных последовательностей аргументов, стремящихся к точке $(0,0)$, соответствующие последовательности значений функции могут сходиться к разным числам. Это означает, что функция $f(x,y)$ не имеет предела в точке $(0,0)$. Значит, из существования обоих повторных пределов не следует существования двойного.

Покажем, что и из существования двойного предела не следует существование повторных.

2) Рассмотрим функцию $f(x,y)=\begin{cases}(x^2+y^2)\sin\dfrac{1}{x}\sin\dfrac{1}{y}, & xy\neq 0\\ 0, & xy=0\end{cases}$. Если $x^2+y^2\to 0$, то $f(x,y)\to 0$ (как произведение бесконечно малой функции на ограниченную). Значит, $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f(x,y)=0$ (определение предела функции по Коши).

Покажем, что не существует ни один из повторных пределов (поскольку переменные входят в нашу функцию симметричным образом, то достаточно рассмотреть один из таких пределов). Пусть, например, $y\neq 0$. Тогда очевидно, что $\lim\limits_{x\to 0} x^2\sin\dfrac{1}{x}\sin\dfrac{1}{y}=0$, а $\lim\limits_{x\to 0} y^2\sin\dfrac{1}{x}\sin\dfrac{1}{y}$ не существует. Значит, не существует предел $\lim\limits_{x\to 0} f(x,y)$ при любом фиксированном $y\neq 0$, и тем более, не существует предел $\lim\limits_{y\to 0}\lim\limits_{x\to 0} f(x,y)$.

Легко показать также, что у функции могут существовать двойной и один из повторных пределов, но не быть второго повторного предела. Для этого немного изменим функцию из примера 2:

3) Пусть $f(x,y)=\begin{cases}(x^2+y^2)\sin\dfrac{1}{y}, & y\neq 0\\ 0, & y=0\end{cases}$. Тогда $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f(x,y)=0$, $\lim\limits_{y\to 0}\lim\limits_{x\to 0} f(x,y)=0$, $\lim\limits_{x\to 0}\lim\limits_{y\to 0} f(x,y)$ не существует (проверьте это самостоятельно!)

И наконец, рассмотрим пример того, что оба повторных предела могут существовать, но не быть равными.

4) $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}, & x^2+y^2\neq 0\\ 0, & x^2+y^2=0\end{cases}$. Тогда ясно, что $\lim\limits_{y\to 0}\lim\limits_{x\to 0} f(x,y)=-1$, а $\lim\limits_{x\to 0}\lim\limits_{y\to 0} f(x,y)=1$. Покажите, что $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f(x,y)$ в этом случае не существует.

Упражнение. Покажите, что если существует $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y)=b$ и $\lim\limits_{x\to x_0}\lim\limits_{y\to y_0} f(x,y)=c$, то $b=c$.

Лекция 16.
Непрерывность функции многих переменных.

Пусть функция $f(x)$ задана на множестве $X \subset \mathbb{R}^n$, $a \in X$, a является предельной точкой множества X.

Определение 1 (формальное). Функция $f(x)$ *непрерывна в точке* a, если $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$.

Определение 2 (Коши). Функция $f(x)$ *непрерывна в точке* a, если для любого $\varepsilon > 0$ найдется число $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ такое, что для любой точки $x \in D_f$, для которой $\rho(x,a) < \delta$, выполнено: $\left| f(x) - f(a) \right| < \varepsilon$.

Определение 3 (Гейне). Функция $f(x)$ *непрерывна в точке* a, если для любой последовательности аргументов $\{x^m\}$, $x^m \xrightarrow[m \to \infty]{} a$, соответствующая последовательность значений функции $f(x^m) \xrightarrow[m \to \infty]{} f(a)$.

Эквивалентность определений 1, 2 и 3 сразу следует из эквивалентности определений предела функции по Коши и по Гейне.

Пусть множество $X \subset \mathbb{R}^n$ таково, что любая его точка является для него предельной.

Определение 4. Функция $f(x)$, определенная на множестве X, называется *непрерывной на этом множестве*, если она непрерывна в каждой точке $x \in X$.

Обозначим $\Delta x_1 = x_1 - a_1$, ..., $\Delta x_n = x_n - a_n$ - *приращения аргументов*. Тогда $\Delta f(x) = f(x) - f(a) = f(a_1 + \Delta x_1, \ldots, a_n + \Delta x_n) - f(a_1, \ldots, a_n)$ - *приращение функции* $f(x)$ *в точке* a.

Отметим, что функция $f(x)$ непрерывна в точке a тогда и только тогда, когда $\lim\limits_{x \to a} \Delta f(x) = 0$, что равносильно: $\lim\limits_{\substack{\Delta x_1 \to 0 \\ \ldots \\ \Delta x_n \to 0}} \Delta f(x) = 0$.

Определение 5. Пусть $\Delta_k f(x) = f(a_1, \ldots, a_{k-1}, a_k + \Delta x_k, a_{k+1}, \ldots, a_n) - f(a_1, \ldots, a_n)$ - *частное приращение* функции $f(x)$ в точке a, соответствующее ли приращению Δx_k. Функция $f(x)$ называется *непрерывной в точке* a *по переменной* x_k, если $\lim\limits_{\Delta x_k \to 0} \Delta_k f(x) = 0$.

Замечание. Если функция непрерывна в некоторой точке, то она непрерывна в этой точке по каждой из переменных. Обратное, вообще говоря, неверно.

Примеры. 1) Пусть $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{(x+y)^2}{x^2+y^2}, & x^2+y^2 \neq 0 \\ 1, & x^2+y^2 = 0 \end{cases}$. Тогда $\lim\limits_{\Delta x \to 0} f(0+\Delta x, 0) - f(0,0) =$ $= \lim\limits_{\Delta x \to 0} \left(\dfrac{(\Delta x)^2}{(\Delta x)^2} - 1 \right) = 0$. Значит, функция $f(x,y)$ непрерывна по x в точке $(0,0)$.

Аналогично доказывается непрерывность по y в точке $(0,0)$. Однако $f(x,y)$ не является непрерывной в начале координат: пусть $x_m=\frac{1}{m}$, $y_m=-\frac{1}{m}$, тогда $f(x_m,y_m)\equiv 0$. Мы получили, что последовательность $\{(x_m,y_m)\}\xrightarrow[m\to\infty]{}(0,0)$, но $\{f(x_m,y_m)\}$ не стремится при $m\to\infty$ к $f(0,0)=1$, то есть функция $f(x,y)$ не является непрерывной в точке $(0,0)$ по совокупности аргументов (т.к. не выполняется определение Гейне).

2) Рассмотрим функцию $f(x,y)=\begin{cases}\frac{x^2y}{x^4+y^2}, & x^2+y^2\neq 0,\\ 0, & x^2+y^2=0\end{cases}.$

На любой прямой $y=kx,\ k\neq 0$, имеем:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=\lim_{x\to 0}\frac{kx^3}{x^4+k^2x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{kx}{x^2+k^2}=0=f(0{,}0)$$

При этом на кривой $y=x^2$:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=\lim_{x\to 0}\frac{x^4}{x^4+x^4}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{2}=\frac{1}{2}\neq f(0,0)$$

то есть функция разрывна в точке $(0,0)$

Теорема 1. Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ определены на множестве $X\subset\mathbb{R}^n$. Если $f(x)$ и $g(x)$ непрерывны в точке $a\in X$, то функции $(f(x)\pm g(x))$, $(f(x)\cdot g(x))$, $\frac{f(x)}{g(x)}$ (при $g(a)\neq 0$) непрерывны в точке a.

Доказательство теоремы 1 следует из определения непрерывности функции в точке и теоремы об арифметических операциях над функциями, имеющими предел.

Определение 6. Пусть $x_1=\varphi_1(t_1,\ldots,t_k)$, ..., $x_n=\varphi_n(t_1,\ldots,t_k)$ - функции, заданные на множестве $T\subset\mathbb{R}^k$. Тогда любой точке $t\in T$ можно поставить в соответствие точку $x=(x_1,\ldots,x_n)=(\varphi_1(t),\ldots,\varphi_n(t))\in\mathbb{R}^n$. Пусть $X\subset\mathbb{R}^n$ - множество всех таких точек x. Если на множестве X задана функция $f(x):X\to\mathbb{R}$, то говорят, что на множестве T задана *сложная функция* $f(x_1(t_1,\ldots,t_k),\ldots,x_n(t_1,\ldots,t_k))=f(x(t)):T\to\mathbb{R}$.

Теорема 2 (непрерывность сложной функции). Пусть функции $x_1=\varphi_1(t_1,\ldots,t_k)$, ..., $x_n=\varphi_n(t_1,\ldots,t_k)$ непрерывны в точке $a=(a_1,\ldots,a_k)\in T$, а функция $f(x_1,\ldots,x_n)$ непрерывна в точке $b=(b_1,\ldots,b_n)$, где $b_j=\varphi_j(a_1,\ldots,a_k)$, $j=1,\ldots,n$. Тогда сложная функция $f(x(t))$ непрерывна в точке a.

Доказательство. Пусть последовательность $\{t^m\}=\{(t_1^m,\ldots,t_k^m)\}$ точек множества T сходится к точке $a=(a_1,\ldots,a_k)\in T$. Обозначим $x_j^m=\varphi_j(t_1^m,\ldots,t_k^m)$, $j=1,\ldots,n$; $\{x^m\}=\{(x_1^m,\ldots,x_n^m)\}$. Так как все функции $\varphi_j(t)$ непрерывны в точке a, то последовательность $\{x^m\}$ сходится к $b=(\varphi_1(a),\ldots,\varphi_n(a))$ (здесь мы пользуемся определением непрерывности функции по Гейне, а также тем фактом, что последовательность точек пространства $\mathbb{R}^n$ сходится тогда и только тогда, когда она сходится покоординатно). Поскольку функция $f(x_1,\ldots,x_n)$, в свою очередь, непрерывна в точке $b=(b_1,\ldots,b_n)$, $b_j=\varphi_j(a_1,\ldots,a_k)$, то числовая последовательность $\{f(x^m)\}$ сходится к $f(b)$. Мы получили, что для любой последовательности аргументов $\{t^m\}=\{(t_1^m,\ldots,t_k^m)\}$, сходящейся к точке a, соответствующая последовательность значений функции $\{f(x(t^m))\}$ сходится к $f(x(a))$. Это означает, что сложная функция $f(x(t))$ непрерывна в точке a. Теорема доказана.

Теорема 3 (сохранение знака). Если функция $f(x)$ определена в некоторой окрестности точки $a \in \mathbb{R}^n$, непрерывна в точке a и $f(a) > 0$ (< 0) то существует число $\delta > 0$ такое, что $f(x) > 0$ (< 0) для любой точки $x \in B_\delta(a)$.

Доказательство. Пусть $f(a) > 0$ (случай противоположного знака рассматривается аналогично). Обозначим $\varepsilon = \dfrac{f(a)}{2}$. Тогда $\varepsilon > 0$ и существует $\delta > 0$ такое, что $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$ для любого x, $\rho(a, x) < \delta$ (определение Коши непрерывности функции в точке). Раскрывая модуль, получим: $0 < \dfrac{f(a)}{2} < f(x) < \dfrac{3f(a)}{2}$ для любого $x \in B_\delta(a)$. Теорема доказана.

Теорема 4 (прохождение через промежуточные значения). Пусть множество $X \subset \mathbb{R}^n$ линейно связно, и функция $f(x)$ непрерывна в каждой точке множества X. Если точки $a, b \in X$, а число γ лежит между $f(a)$ и $f(b)$, то на любой непрерывной кривой, соединяющей точки a и b и принадлежащей множеству X, найдется точка c такая, что $f(c) = \gamma$.

Доказательство. Пусть кривая L задается уравнениями $x_1 = \varphi_1(t)$, ..., $x_n = \varphi_n(t)$, $\alpha \le t \le \beta$, все функции $\varphi_k(t)$ непрерывны на отрезке $[\alpha, \beta]$, причем L целиком принадлежит множеству X. Тогда на отрезке $[\alpha, \beta]$ задана функция $f(x_1(t), \dots, x_n(t))$, которая является непрерывной на $[\alpha, \beta]$ по теореме о непрерывности сложной функции. Поскольку $f(x(t))$ является числовой функцией аргумента t, то (по теореме о прохождении непрерывной функции через любое промежуточное значение) для любого числа γ, лежащего между $f(x(\alpha))$ и $f(x(\beta))$, найдется точка $\xi \in [\alpha, \beta]$ такая, что $f(x(\xi)) = \gamma$. Пусть $c \in \mathbb{R}^n$ - точка с координатами $(\varphi_1(\xi), \dots, \varphi_n(\xi))$. Тогда $c \in L$, $f(c) = \gamma$. Теорема доказана.

Теорема 5 (первая теорема Вейерштрасса). Если функция $f(x)$ непрерывна на замкнутом ограниченном множестве $X \subset \mathbb{R}^n$, то она ограничена на этом множестве.

Доказательство. Пусть это не так. Тогда для любого натурального числа m найдется точка $x^m \in X$ такая, что $|f(x^m)| > m$. Последовательность $\{x^m\}$ ограничена (поскольку ограничено множество X), значит, из нее можно выделить сходящуюся подпоследовательность $\{x^{k_m}\}$ (теорема Больцано-Вейерштрасса). Пусть $x^{k_m} \xrightarrow[m \to \infty]{} x_0$. Так как множество X замкнуто, то оно содержит все свои предельные точки. Следовательно, $x_0 \in X$. Тогда функция $f(x)$ непрерывна в точке x_0 и последовательность $\{f(x^{k_m})\}$ должна сходиться при $m \to \infty$ к числу $f(x_0)$. Но последовательность $\{f(x^{k_m})\}$ - бесконечно большая (так как $|f(x^{k_m})| > k_m$ для любого m). Значит, наше предположение неверно, и функция $f(x)$ ограничена на множестве X. Теорема доказана.

Определение 7. *Точной верхней (нижней) гранью функции* $f(x)$ *на множестве* $X \subset \mathbb{R}^n$ называется действительное число M (m) такое, что

1) $f(x) \le M$ ($f(x) \ge m$) для любого $x \in X$;

2) для любого числа $\varepsilon > 0$ найдется точка $x' \in X$ такая, что $f(x') > M - \varepsilon$ ($f(x') < m + \varepsilon$).

Теорема 6 (вторая теорема Вейерштрасса). Если функция $f(x)$ непрерывна на замкнутом ограниченном множестве $X \subset \mathbb{R}^n$, то она достигает на этом множестве своих точной верхней и точной нижней граней.

Доказательство. Пусть $M = \sup\limits_X f(x)$. Если $f(x) < M$ для любого $x \in X$, то функция $F(x) = \dfrac{1}{M - f(x)}$ непрерывна на множестве X и $F(x) > 0$ для любого $x \in X$. Значит, согласно первой теореме Вейерштрасса, существует число $A > 0$ такое, что $F(x) \le A$ при всех $x \in X$. Тогда $f(x) \le M - \dfrac{1}{A} < M$ для любого $x \in X$. Мы пришли к противоречию с определением точной верхней грани. Значит, наше предположение неверно, и существует точка $x_0 \in X$ такая, что $f(x_0) = M$. Случай точной нижней грани рассматривается аналогично. Теорема доказана.

Определение 8. Пусть множество $X \subset \mathbb{R}^n$ таково, что любая его точка является предельной. Функция $f(x)$ *равномерно непрерывна* на множестве X, если для любого $\varepsilon > 0$ найдется число $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ такое, что для любых двух точек $x', x'' \in X$, $\rho(x', x'') < \delta$, выполнено: $|f(x') - f(x'')| < \varepsilon$.

Теорема 7 (теорема Кантора). Если функция $f(x)$ непрерывна на замкнутом ограниченном множестве $X \subset \mathbb{R}^n$, то она равномерно непрерывна на этом множестве.

Доказательство. Пусть $f(x)$ непрерывна, но не равномерно непрерывна на X. Тогда существует $\varepsilon > 0$ такое, что для любого натурального числа m найдутся точки $x'_m, x''_m \in X$, для которых $\rho(x'_m, x''_m) < \dfrac{1}{m}$, но

(1) $$|f(x'_m) - f(x''_m)| \ge \varepsilon.$$

Последовательность $\{x'_m\}$ ограничена, следовательно, из нее можно выделить сходящуюся подпоследовательность $\{x'_{k_m}\}$. Пусть $x'_{k_m} \xrightarrow[m\to\infty]{} x_0$. Так как множество X замкнуто, то $x_0 \in X$. Функция $f(x)$ непрерывна в точке x_0, значит, $f(x'_{k_m}) \xrightarrow[m\to\infty]{} f(x_0)$.

С другой стороны, так как $\rho(x'_{k_m}, x''_{k_m}) < \dfrac{1}{k_m}$, то последовательность $\{x''_{k_m}\}$ также сходится к точке x_0 при $m \to \infty$. Значит, $f(x''_{k_m}) \xrightarrow[m\to\infty]{} f(x_0)$. Тогда получаем, что $|f(x'_{k_m}) - f(x''_{k_m})| \xrightarrow[m\to\infty]{} 0$. Это противоречит неравенству (1). Следовательно, наше предположение неверно, и функция $f(x)$ равномерно непрерывна на множестве X. Теорема доказана.

Лекция 17.

Дифференцирование функции многих переменных.

Пусть функция $f(x)$ определена на множестве $X \subset \mathbb{R}^n$, точка $x^0 = (x_1^0, x_2^0, ..., x_n^0)$ - внутренняя точка множества X; $\Delta x = (\Delta x_1, ..., \Delta x_n)$, где $\Delta x_k \in \mathbb{R}$, $k = 1,2,...,n$ – приращения аргументов, такие, что точка $x = x^0 + \Delta x \in X$.

Определение 1. *Частной производной функции* $f(x)$ *по переменной* x_k *в точке* x^0 называется предел:

$$\frac{\partial f}{\partial x_k}(x^0) = \lim_{\Delta x_k \to 0} \frac{\Delta_k f}{\Delta x_k} = \lim_{\Delta x_k \to 0} \frac{f(x_1^0, ..., x_{k-1}^0, x_k^0 + \Delta x_k, x_{k+1}^0, ..., x_n^0) - f(x_1^0, ..., x_{k-1}^0, x_k^0, x_{k+1}^0, ..., x_n^0)}{\Delta x_k}.$$

Часто вместо $\dfrac{\partial f}{\partial x_k}(x^0)$ применяют обозначение $f'_{x_k}(x^0)$.

Заметим, что частная производная – это обычная производная функции одной переменной, которая получается из функции $f(x)$, если зафиксировать и считать постоянными все её переменные, кроме x_k. А поскольку из дифференцируемости функции одной переменной следует её непрерывность (в данной точке), то отсюда сразу следует, что если существует частная производная $\dfrac{\partial f}{\partial x_k}(x^0)$, то функция $f(x)$ непрерывна в точке x^0 по переменной x_k.

Пример. Для функции $f(x, y, z) = x^{\frac{y}{z}}$ частные производные в точке (x, y, z) (при $x > 0,\ z \neq 0$) следующие:

$$f'_x = \frac{y}{z} \cdot x^{\frac{y}{z}-1}, \quad f'_y = \frac{1}{z} \cdot x^{\frac{y}{z}} \cdot \ln x, \quad f'_z = yx^{\frac{y}{z}}(-\frac{1}{z^2})\ln x.$$

Определение 2. Говорят, что *функция* $f(x)$ *дифференцируема в точке* x^0, если существует такая окрестность $B_\delta(x^0)$ точки x^0, что для любого $x \in B_\delta(x^0)$ приращение $\Delta f = f(x) - f(x^0)$ имеет вид:

$$\Delta f = A_1 \Delta x_1 + ... + A_n \Delta x_n + \bar{o}(\rho), \quad \rho \to 0, \tag{1}$$

где $A_1, ..., A_n$ - фиксированные числа, не зависящие от x, $\rho = \|\Delta x\| = \sqrt{\Delta x_1^2 + ... + \Delta x_n^2}$.

Заметим, что $\bar{o}(\rho) = \dfrac{\bar{o}(\rho)}{\rho} \cdot \dfrac{\Delta x_1^2 + ... + \Delta x_n^2}{\rho} = \dfrac{\bar{o}(\rho)}{\rho} \cdot \dfrac{\Delta x_1}{\rho} \cdot \Delta x_1 + ... + \dfrac{\bar{o}(\rho)}{\rho} \cdot \dfrac{\Delta x_n}{\rho} \cdot \Delta x_n$.

Поскольку $\left|\dfrac{\Delta x_k}{\rho}\right| \leq 1$, а величина $\dfrac{\bar{o}(\rho)}{\rho}$ - бесконечно мала при $\rho \to 0$, то, обозначив $\alpha_k = \dfrac{\bar{o}(\rho) \cdot \Delta x_k}{\rho^2}$, $k = 1,2,...,n$, получаем: $\bar{o}(\rho) = \alpha_1 \cdot \Delta x_1 + ... + \alpha_n \cdot \Delta x_n$, где $\alpha_1, ..., \alpha_n$ - бесконечно малы при $\rho \to 0$, или, равносильно, при $\Delta x_1 \to 0, ...\ \Delta x_n \to 0$.

Это позволяет получить следующее представление приращения дифференцируемой функции:

$$\Delta f = A_1 \Delta x_1 + ... + A_n \Delta x_n + \alpha_1 \Delta x_1 + ... + \alpha_n \Delta x_n = (A, \Delta x) + (\alpha, \Delta x). \tag{2}$$

Здесь в скалярных произведениях участвуют векторы

$$A = (A_1, ..., A_n),\ \alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_n),\ \Delta x = (\Delta x_1, ..., \Delta x_n).$$

Наоборот, $\alpha_1 \Delta x_1 + \cdots + \alpha_n \Delta x_n = \rho \cdot \left(\alpha_1 \frac{\Delta x_1}{\rho} + \cdots + \alpha_n \frac{\Delta x_n}{\rho}\right) = \bar{o}(\rho),\ \rho \to 0.$

При этом выражение $A_1 \Delta x_1 + ... + A_n \Delta x_n = (A, \Delta x)$ есть главная, линейная относительно приращений переменных, часть приращения функции Δf.

Определение 3. *Дифференциалом (первым дифференциалом) функции* $f(x)$ *в точке* x^0 *(соответствующим вектору* Δx *приращений переменных)* называется главная, линейная относительно приращений переменных, часть приращения функции:

$$df(x^0;\Delta x) = A_1\Delta x_1 + \ldots + A_n\Delta x_n,$$

где константы $A_1,\ldots,A_n$ определены из равенства (1).

Что же представляют собой эти константы $A_1,\ldots,A_n$? Ответ на этот вопрос мы получим из следующей теоремы.

Теорема 1. (*Необходимое условие дифференцируемости функции*) . Если функция $f(x)$ дифференцируема в точке x^0, то в этой точке существуют её частные производные f'_{x_k} по всем переменным x_k, $k=1,\ldots,n.$

Кроме того, $f'_{x_k}(x^0) = A_k$, $k=1,\ldots,n$, где A_k - постоянные из формулы (1).

Доказательство. Возьмём вектор приращений $\Delta x = \Delta_k x = (0,\ldots,0,\Delta x_k,0,\ldots,0)$, то есть переместимся от точки x^0 в некоторую точку x вдоль координатной оси x_k. Поскольку $f(x)$ дифференцируема в x^0, то её приращение (согласно (1)) в данном случае имеет вид: $\Delta f = A_k\Delta x_k + \bar{o}(\rho),\ \rho = |\Delta x_k|$. Следовательно, $\dfrac{\partial f}{\partial x_k}(x^0) = \lim\limits_{\Delta x_k\to 0}\dfrac{\Delta_k f}{\Delta x_k} = A_k$, что и завершает доказательство теоремы.

Отметим, что теорема 1 также показывает, что константы $A_1,\ldots,A_n$ в определении 2 являются однозначно определёнными.

Следствие. Если функция $f(x)$ дифференцируема в точке x^0, то при достаточно малом ρ приращение функции имеет вид:

$$\Delta f = \frac{\partial f}{\partial x_1}\cdot\Delta x_1 + \ldots + \frac{\partial f}{\partial x_n}\cdot\Delta x_n + \bar{o}(\rho), \tag{3}$$

где все частные производные вычислены в точке x^0.

Из теоремы 1 вытекает также, что для дифференцируемой функции можно определять дифференциал как главную, линейную относительно приращений переменных, часть приращения функции, задаваемую равенством:

$$df(x^0;\Delta x) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(x^0)\cdot\Delta x_1 + \ldots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(x^0)\cdot\Delta x_n. \tag{4}$$

Теорема 2. Если функция $f(x)$ дифференцируема в точке x^0, то она непрерывна в этой точке.

Доказательство. Используя представление (3) и неравенства: $|\Delta x_k| \le \rho, k=1,\ldots,n,$ получаем:

$$|\Delta f| = \left|\frac{\partial f}{\partial x_1}\cdot\Delta x_1 + \ldots + \frac{\partial f}{\partial x_n}\cdot\Delta x_n + \bar{o}(\rho)\right| \le$$

$$\left|\frac{\partial f}{\partial x_1}\cdot\Delta x_1\right| + \ldots + \left|\frac{\partial f}{\partial x_n}\cdot\Delta x_n\right| + |\bar{o}(\rho)| \le \left(\sum_{k=1}^{n}\left|\frac{\partial f}{\partial x_k}\right|\right)\cdot\rho + |\bar{o}(\rho)|$$

Отсюда ясно, что $\lim\limits_{\rho\to 0}\Delta f = 0$. Это и означает непрерывность функции $f(x)$ в данной точке. Теорема доказана.

Геометрический смысл дифференцируемости функции двух переменных. Касательная плоскость к поверхности.

Известно, что дифференцируемость функции одной переменной равносильна существованию (в соответствующей точке) касательной у графика этой функции. Оказывается, понятие дифференцируемости функции двух переменных имеет, как мы увидим ниже, аналогичный геометрический смысл.

Пусть задана некоторая поверхность $S: F(x,y,z) = 0.$

Определение 4. Плоскость P называется *касательной* к поверхности $S: F(x,y,z)=0$ в точке $M_0 = M_0(x_0;y_0;z_0)$, если угол между плоскостью P и всякой секущей L, проходящей через точку M_0 и (любую) другую точку $M = M(x;y;z)$ поверхности S, стремится к нулю при $M \to M_0$.

Заметим, что, согласно этому определению, для любой кривой $l,\, l \subset S,$ проходящей через точку M_0, касательная к ней (если она существует) в точке M_0 обязательно лежит в плоскости P.

Лемма 1. Пусть функция $z = f(x,y)$ дифференцируема в точке $(x_0;y_0)$, и $z_0 = f(x_0;y_0)$. Тогда у поверхности $\Gamma: f(x,y) - z = 0$ (представляющей собой график данной функции) в точке $M_0 = M_0(x_0;y_0;z_0)$ имеется касательная плоскость, задаваемая следующим образом:

$$P = P_{M_0}^{\Gamma} : f'_x(x_0;y_0)(x-x_0) + f'_y(x_0;y_0)(y-y_0) - (z-z_0) = 0.$$

Доказательство. Покажем, что P удовлетворяет определению касательной плоскости. Как известно из курса аналитической геометрии, вектор $\overline{n}_P = \left\{ f'_x(x_0;y_0); f'_y(x_0;y_0); -1 \right\}$ является нормальным к P в точке $M_0 = M_0(x_0;y_0;z_0) \in P$. Пусть $M = M(x;y;z)$ - некоторая другая точка графика Γ. Тогда

$$|\cos(\overline{M_0M},^\wedge \overline{n}_P)| = \frac{|(\overline{M_0M}, \overline{n}_P)|}{\left\|\overline{M_0M}\right\| \cdot \left\|\overline{n}_P\right\|} = \frac{|\, f'_x(x_0;y_0)(x-x_0) + f'_y(x_0;y_0)(y-y_0) - (z-z_0)\,|}{\left\|\overline{M_0M}\right\| \cdot \left\|\overline{n}_P\right\|}.$$

Далее, воспользовавшись тем, что в силу дифференцируемости функции $z = f(x,y)$ в точке $(x_0;y_0)$, выражение под знаком модуля в числителе есть $\overline{o}(\rho)$, где $\rho = \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2}$, а $\left\|\overline{M_0M}\right\| = \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2} \ge \rho$, получаем:

$$|\cos(\overline{M_0M},^\wedge \overline{n}_P)| = \frac{|\overline{o}(\rho)|}{\left\|\overline{M_0M}\right\| \cdot \left\|\overline{n}_P\right\|} \le \frac{|\overline{o}(\rho)|}{\rho \cdot \left\|\overline{n}_P\right\|} \xrightarrow[M \to M_0]{} 0.$$ Лемма доказана.

Выясним теперь, каким условиям должна удовлетворять функция для того, чтобы она была дифференцируемой. Оказывается, что наличие частных производных у функции в данной точке не является достаточным условием для её дифференцируемости.

Пример. Рассмотрим функцию $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y^2}, & x^2+y^2 > 0 \\ 0, & x = y = 0 \end{cases}$. Её обе частные производные в точке $(0;0)$ равны нулю, поскольку $f(0,y) \equiv f(x,0) \equiv 0$. При этом функция не дифференцируема в этой точке, поскольку $\Delta f = f(x,y) - f(0;0) = \dfrac{xy}{x^2+y^2}$ - не имеет предела при $\rho = \sqrt{x^2+y^2} \to 0$ (Убедитесь в этом самостоятельно!).

Теорема 3. (*Достаточное условие дифференцируемости функции*). Если функция $f(x) = f(x_1, x_2, ..., x_n)$ имеет все частные производные в некоторой окрестности точки $x^0 = (x_1^0, x_2^0, ..., x_n^0)$, и все они непрерывны в самой точке x^0, то $f(x)$ дифференцируема в точке x^0.

Доказательство. Рассмотрим приращение функции $f(x)$ в точке x^0:

$$\Delta f = f(x_1^0 + \Delta x_1, \dots, x_n^0 + \Delta x_n) - f(x_1^0, \dots, x_n^0) =$$

$$= [f(x_1^0 + \Delta x_1, \dots, x_{n-1}^0 + \Delta x_{n-1}, x_n^0 + \Delta x_n) - f(x_1^0 + \Delta x_1, \dots, x_{n-1}^0 + \Delta x_{n-1}, x_n^0)] +$$

$$+[f(x_1^0 + \Delta x_1, \dots, x_{n-2}^0 + \Delta x_{n-2}, x_{n-1}^0 + \Delta x_{n-1}, x_n^0) - f(x_1^0 + \Delta x_1, \dots, x_{n-2}^0 + \Delta x_{n-2}, x_{n-1}^0, x_n^0)] +$$

$$+ \cdots + [f(x_1^0 + \Delta x_1, x_2^0, \dots x_n^0) - f(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)] =$$

(применяя теорему Лагранжа к разностям в квадратных скобках, получаем)

$$= f'_{x_n}(x_1^0 + \Delta x_1, \dots, x_{n-1}^0 + \Delta x_{n-1}, x_n^0 + \theta_n \Delta x_n)\Delta x_n + f'_{x_{n-1}}(x_1^0 + \Delta x_1, \dots, x_{n-1}^0 + \theta_{n-1}\Delta x_{n-1}, x_n^0)\Delta x_{n-1} +$$

$$+ \cdots + f'_{x_1}(x_1^0 + \theta_1 \Delta x_1, x_2^0, \dots, x_{n-1}^0, x_n^0)\Delta x_1 =$$

(в силу непрерывности частных производных в точке x^0)

$$= \left(f'_{x_n}(x_1^0, \dots, x_{n-1}^0, x_n^0) + \alpha_n\right)\Delta x_n + \left(f'_{x_{n-1}}(x_1^0, \dots, x_{n-1}^0, x_n^0) + \alpha_{n-1}\right)\Delta x_{n-1} + \cdots$$

$$\dots + (f'_{x_1}(x_1^0, \dots, x_{n-1}^0, x_n^0) + \alpha_1)\Delta x_1 =$$

$$= f'_{x_1}(x^0)\Delta x_1 + \cdots + f'_{x_n}(x^0)\Delta x_n + \alpha_1 \Delta x_1 + \cdots + \alpha_n \Delta x_n,$$

где $\alpha_k \to 0$ при $\Delta x_1 \to 0, \dots \Delta x_n \to 0,\ k = 1, \dots, n$. Это и означает дифференцируемость функции $f(x)$ в точке x^0. Теорема доказана.

Пример. Функция $f(x,y) = \begin{cases} (x^2+y^2)\sin\frac{1}{x^2+y^2}, & x^2+y^2 \neq 0, \\ 0, & x^2+y^2 = 0 \end{cases}$ дифференцируема в точке $(0,0)$: $f(x,0) = x^2 \sin\frac{1}{x^2}$, следовательно, $f'_x(0,0) = 0$; аналогично $f'_y(0,0) = 0$. Далее,

$$\Delta f(0,0) = (x^2+y^2)\sin\frac{1}{x^2+y^2} = 0\cdot(x-0) + 0\cdot(y-0) + \bar{o}\left(\sqrt{x^2+y^2}\right), \qquad \sqrt{x^2+y^2} \to 0.$$

При этом частные производные функции $f(x,y)$ разрывны в точке $(0,0)$ (проверьте!)

Дифференцируемость сложной функции.

Пусть $g(t) = f(\varphi(t))$ сложная функция, где $f(x) = f(x_1, \dots, x_n)$, и $x_i(t) = \varphi_i(t_1, \dots, t_k), i = 1, \dots, n.$

Теорема 4. Пусть функции $\varphi_i(t) = \varphi_i(t_1, \dots, t_k), i = 1, \dots, n,$ дифференцируемы в точке $t^0 = (t_1^0, \dots, t_k^0)$, и функция $f(x) = f(x_1, \dots, x_n)$ дифференцируема в точке $x^0 = (x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)$, где $x_i^0 = \varphi_i(t^0), i = 1, \dots, n.$ Тогда сложная функция $g(t) = f(\varphi(t))$ дифференцируема в точке $t^0 = (t_1^0, \dots, t_k^0)$.

Доказательство. Рассмотрим приращение:

$$\Delta g = g(t) - g(t^0) = f(x(t)) - f(x(t^0)) = f'_{x_1}\cdot\Delta x_1 + \dots + f'_{x_n}\cdot\Delta x_n + \bar{o}(\|\Delta x\|)$$

В силу дифференцируемости функций $x_i = \varphi_i(t) = \varphi_i(t_1, \dots, t_k), i = 1, \dots, n,$ приращения Δx_i имеют вид:

$$\Delta x_i = \varphi_i(t) - \varphi_i(t^0) = (\varphi_i)'_{t_1}\cdot\Delta t_1 + \dots + (\varphi_i)'_{t_k}\cdot\Delta t_k + \bar{o}_i(\|\Delta t\|),\ i = 1, \dots, n.$$

Подставляя эти выражения в представление для приращения Δg, получаем:

$$\Delta g = (\sum_{i=1}^{n} f'_{x_i}\cdot(x_i)'_{t_1})\cdot\Delta t_1 + \dots + (\sum_{i=1}^{n} f'_{x_i}\cdot(x_i)'_{t_k})\cdot\Delta t_k + \sum_{i=1}^{n} f'_{x_i}\cdot\bar{o}_i(\|\Delta t\|) + \bar{o}(\|\Delta x\|).$$

Далее, поскольку $\bar{o}(\|\Delta x\|) = \sum_{i=1}^{n}\alpha_i \Delta x_i$, то получаем:

t.

Последнее равенство следует из того, что $|\Delta t_j| \le \|\Delta t\|,\ j = 1, \dots, k$, и кроме того, $\alpha_i \to 0$ при $\|\Delta t\| \to 0$. (Действительно, из условия $\|\Delta t\| \to 0$ в силу дифференцируемости, а значит, и непрерывности, функции $x_i = \varphi_i(t)$ следует, что $\|\Delta x\| \to 0$, а следовательно, и $\alpha_i \to 0$.)

Кроме того, $\sum_{i=1}^{n} f'_{x_i}\cdot\bar{o}_i(\|\Delta t\|) = \bar{o}(\|\Delta t\|)$.

Итак, получаем:

$$\Delta g = (\sum_{i=1}^{n} f'_{x_i}\cdot(x_i)'_{t_1})\cdot\Delta t_1 + \dots + (\sum_{i=1}^{n} f'_{x_i}\cdot(x_i)'_{t_k})\cdot\Delta t_k + \bar{o}(\|\Delta t\|),$$

что и означает дифференцируемость данной сложной функции $g(t) = f(\varphi(t))$ в точке $t_0 = (t_1^0,...,t_k^0)$. (Напомним здесь ещё раз, что все частные производные вычислены в заданных точках t^0, x^0 соответственно). Теорема доказана.

Замечание:

Из доказательства теоремы 4 видно, что частные производные сложной функции вычисляются по формулам:

$$\frac{\partial g}{\partial t_j} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial \varphi_i}{\partial t_j}, \quad j = 1,...,k.$$

Инвариантность формы записи (первого) дифференциала.

Из теоремы 4 вытекает также следующее важное

Утверждение 1. Первый дифференциал функции многих переменных имеет инвариантную форму записи:

$$df = \frac{\partial f}{\partial x_1} \cdot dx_1 + ... + \frac{\partial f}{\partial x_n} \cdot dx_n .$$

независимо от того, является ли эта функция простой (то есть $x_1,...,x_n$ - независимые переменные) или сложной (то есть $x_i(t) = \varphi_i(t_1,...,t_k),\ i = 1,...,n.$) При этом смысл выражений dx_i различен. В первом случае, когда x_i - независимые переменные, $dx_i = \Delta x_i$ - фиксированные приращения переменных; во втором случае $dx_i = d\varphi_i(t)$ – это дифференциалы функций $x_i(t) = \varphi_i(t_1,...,t_k), i = 1,...,n.$)

Доказательство.

Пусть сначала $x_k, k = 1,...,n$ - независимые переменные. Тогда

$$dx_k = (x_k)'_{x_1}\Delta x_1 + \cdots + (x_k)'_{x_k}\Delta x_k + \cdots + (x_k)'_{x_n}\Delta x_n = \Delta x_k.$$

Значит, дифференциал функции $f(x) = f(x_1,...,x_n)$ от n независимых переменных имеет вид:

$$df = \frac{\partial f}{\partial x_1} \cdot dx_1 + ... + \frac{\partial f}{\partial x_n} \cdot dx_n .$$

Если $x_i(t) = \varphi_i(t_1,...,t_k), i = 1,...,n$, то из теоремы 4 перегруппировкой слагаемых получаем:

$$\Delta g = f'_{x_1} \cdot [\sum_{j=1}^{k} (x_1)'_{t_j}) \cdot \Delta t_j] + ... + f'_{x_n} \cdot [\sum_{j=1}^{k} (x_n)'_{t_j}) \cdot \Delta t_j] + \bar{o}(\|\Delta t\|),$$

где выражения в квадратных скобках представляют собой дифференциалы функций $x_i(t) = \varphi_i(t_1,...,t_k),\ i = 1,...,n$. Отсюда сразу следует нужное равенство. Утверждение доказано.

Инвариантная форма первого дифференциала позволяет установить правила его вычисления:

1) $d(c \cdot f) = c \cdot df,\ c \in \mathbb{R}$ - константа;

2) $d(f \pm g) = df \pm dg;$

3) $d(f \cdot g) = g \cdot df + f \cdot dg;$

4) $d(\frac{f}{g}) = \frac{g \cdot df - f \cdot dg}{g^2}, \quad g \neq 0.$

Докажем, например, равенство 3).

Обозначим $h = f \cdot g$, тогда (в силу инвариантности формы первого дифференциала)

$$dh = h'_f df + h'_g dg = (fg)'_f df + (fg)'_g dg = g df + f dg.$$

Упражнение. Докажите равенства 1), 2) и 4).

Лекция 18.

Производная по направлению. Градиент функции.

Рассмотрим некоторое обобщение понятия частной производной функции многих переменных.

Пусть $M_0(x_0, y_0, z_0) \in \mathbb{R}^3$ - внутренняя точка области определения функции $f(x, y, z)$. Пусть задан вектор $e \in \mathbb{R}^3$, $\|e\| = 1$. Тогда $e = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$, где α, β, γ – углы между вектором e и осями Ox, Oy и Oz соответственно.

Рассмотрим функцию $g(t) = f(x_0 + t\cos\alpha, y_0 + t\cos\beta, z_0 + t\cos\gamma)$, где $t \in \mathbb{R}$ – вещественный параметр.

Определение 1. *Производной функции* $f(x)$ *по направлению вектора* $e = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$ в точке $M_0(x_0, y_0, z_0)$ называется производная сложной функции $g(t)$ в точке $t_0 = 0$, то есть число

$$\frac{\partial f}{\partial e}(M_0) = \lim_{t\to 0}\frac{f(M_0 + te) - f(M_0)}{t} = \lim_{t\to 0}\frac{g(t) - g(0)}{t} = g'(0).$$

Предположим, что функция $f(x)$ дифференцируема в точке M_0. Тогда функция $g(t)$ дифференцируема в нуле как сложная функция и справедлива формула:

$$\frac{\partial f}{\partial e}(M_0) = f'_x(M_0)\cdot\cos\alpha + f'_y(M_0)\cdot\cos\beta + f'_z(M_0)\cdot\cos\gamma.$$

Для случая функции двух переменных формула принимает вид:

$$\frac{\partial f}{\partial e}(M_0) = f'_x(M_0)\cdot\cos\alpha + f'_y(M_0)\cdot\sin\alpha,$$

где α - угол между вектором e и осью Ox.

Пусть теперь $x^0 = (x_1^0, ..., x_n^0)$ - фиксированная точка, внутренняя для области определения функции $f(x) = f(x_1, ..., x_n)$, и пусть задан вектор e, $e \in \mathbb{R}^n$ $\|e\| = 1$. В этом случае координаты вектора e равны его направляющим косинусам: $e = (\cos\alpha_1, ..., \cos\alpha_n)$, где α_i - угол между осью Ox_i и вектором e, $i = 1, ..., n$.

Рассмотрим функцию $g(t) = f(x^0 + te) = f(x_1^0 + t\cos\alpha_1, ..., x_n^0 + t\cos\alpha_n)$, где $t \in \mathbb{R}$ – вещественный параметр.

Определение 2. *Производной функции* $f(x)$ *по направлению* $e = (\cos\alpha_1, ..., \cos\alpha_n)$ в точке x^0 называется производная сложной функции $g(t)$ в точке $t_0 = 0$, то есть число

$$\frac{\partial f}{\partial e}(x^0) = \lim_{t\to 0}\frac{f(x^0 + te) - f(x^0)}{t} = \lim_{t\to 0}\frac{g(t) - g(0)}{t} = g'(0). \tag{1}$$

Замечание. Из наличия у функции производной по любому направлению в некоторой точке не следует, вообще говоря, ее дифференцируемость в этой точке. Например, у функции $f(x) = \begin{cases}\frac{x^4y^2}{x^8+y^4}, & x^2 + y^2 \neq 0,\\ 0, & x^2 + y^2 = 0\end{cases}$ производная в точке $(0, 0)$ по любому направлению равна нулю, но функция не является даже непрерывной в этой точке (проверьте!)

Предположим, что функция $f(x)$ дифференцируема в точке x^0. Тогда функция $g(t)$ дифференцируема в точке $t_0 = 0$ как сложная функция, и производная (1) легко вычисляется по правилу дифференцирования сложной функции. Получаем формулу:

$$\frac{\partial f}{\partial e}(x^0) = f'_{x_1}(x^0)\cdot\cos\alpha_1 + ... + f'_{x_n}(x^0)\cdot\cos\alpha_n. \tag{2}$$

Из формулы (2) видно, что производная по направлению есть скалярное произведение вектора e и вектора частных производных функции $f(x)$. Вектор $grad\ f(x^0) = (f'_{x_1}(x^0),..., f'_{x_n}(x^0))$ называется *градиентом* функции $f(x)$ в точке x_0.

Таким образом, получаем равенство:

$$\frac{\partial f}{\partial e}(x^0) = (grad\ f(x^0), e). \qquad (3)$$

Градиент часто представляют в виде: $grad\ f = \nabla f$ (читается: «набла *f*»), где $\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x_1},...,\frac{\partial}{\partial x_n}\right)$ - так называемый *абстрактный вектор-оператор градиента*.

Отметим кстати, что формулу для дифференциала функции можно записать в следующем виде: $df = (gradf, \Delta x) = (\nabla f, \Delta x)$.

Что характеризует градиент функции? Какими свойствами обладает? Выясним это подробнее.

Лемма 1. Градиент функции (в данной точке) – это вектор, направление которого есть направление наибольшей скорости роста функции, а норма градиента равна этой наибольшей скорости роста.

Доказательство. Из формулы (3) получаем:

$$\frac{\partial f}{\partial e}(x^0) = (grad\ f(x^0), e) = \|grad\ f\| \cdot \|e\| \cdot \cos(grad\ f,^{\wedge} e).$$

Поскольку $\cos(grad\ f,^{\wedge} e) \le 1$, и достигает своего наибольшего значения 1, когда векторы сонаправлены, то легко видеть, что максимальное значение производной $\frac{\partial f}{\partial e}(x^0)$ будет в том и только в том случае, когда $e = \frac{grad\ f(x^0)}{\|grad\ f(x^0)\|}$, то есть когда вектор e совпадает с ортом градиента f (в точке x^0).

Какова же максимальная скорость роста функции f? Из (3), при $e = \frac{grad\ f(x^0)}{\|grad\ f(x^0)\|}$, получаем: $\frac{\partial f}{\partial e}(x^0) = (grad\ f(x^0), \frac{grad\ f(x^0)}{\|grad\ f(x^0)\|}) = \|grad\ f(x^0)\|$. Лемма доказана.

Замечание. Поскольку, в силу леммы 1, направление и норма градиента есть направление и величина максимальной скорости роста функции (в данной точке), то градиент $grad\ f(x)$ не зависит от выбора системы координат.

Рассмотрим теперь направление градиента функции по отношению к её *поверхности уровня*, то есть к геометрическому месту точек, определяемому уравнением: $P_c: f(x) = f(x_1,...,x_n) = c$, где c - некоторая константа.

Лемма 2. Градиент дифференцируемой в точке x^0 функции $f(x)$ ортогонален её поверхности уровня P_c, проходящей через точку x^0.

Доказательство. Пусть в малой окрестности точки x^0 взята произвольная точка $x,\ x \in P_c, x - x^0 = \Delta x \ne 0$. В силу дифференцируемости функции $f(x)$ в точке x^0, имеем: $0 = \Delta f = f(x^0 + \Delta x) - f(x^0) = (grad\ f(x^0), \Delta x) + \bar{o}(\|\Delta x\|)$. Разделив это равенство на $\|\Delta x\|$, получим:

$$0=\frac{\Delta f}{\|\Delta x\|}= f'_{x_1}(x^0)\frac{\Delta x_1}{\|\Delta x\|}+...+ f'_{x_n}(x^0)\frac{\Delta x_n}{\|\Delta x\|}+\frac{\overline{o}(\|\Delta x\|)}{\|\Delta x\|}=(grad\ f(x^0),\frac{\Delta x}{\|\Delta x\|})+\frac{\overline{o}(\|\Delta x\|)}{\|\Delta x\|}.$$

При переходе к пределу при $\Delta x \to 0$ в последнем соотношении вектор $\frac{\Delta x}{\|\Delta x\|}$ превращается в касательный вектор $e_{\text{кас.}}$ в точке x^0 к поверхности P_c, и получается равенство:

$(grad\ f(x_0), e_{\text{кас.}})=0$. Таким образом, $grad\ f(x^0)\perp e_{\text{кас.}}$. В силу произвольности точки $x\in P_c$ отсюда следует, что $grad\ f(x^0)\perp P_c$. Это завершает доказательство леммы.

Частные производные высших порядков.

Если у функции $f(x)=f(x_1,...,x_n)$ частная производная $\frac{\partial f}{\partial x_k}$ определена в некоторой области $D\subset\mathbb{R}^n$, то она также является функцией n переменных. Может случиться, что эта функция имеет частную производную по переменной x_i в некоторой внутренней точке $x^0=(x_1^0,...,x_n^0)$ области D. Тогда эту производную $\frac{\partial}{\partial x_i}(\frac{\partial f}{\partial x_k})(x^0)=\frac{\partial^2 f}{\partial x_i\partial x_k}(x^0)$ называют *второй частной производной функции* f *сначала по переменной* x_k*, а затем по переменной* x_i*, в точке* $x^0=(x_1^0,...,x_n^0)$ (то есть сначала производится дифференцирование по x_k, а затем по x_i). Если $x_k\neq x_i$, то частная производная второго порядка называется *смешанной.*

Далее, применяя такое же рассуждение ко второй частной производной, можно определить понятие третьей частной производной, и так деле. Основываясь на этом описании понятия второй частной производной, мы можем ввести следующее общее индуктивное определение:

Определение 3. Если у функции $f(x)=f(x_1,...,x_n)$ определена частная производная $(n-1)$-го порядка $\frac{\partial^{n-1} f}{\partial x_{i_{n-1}}...\partial x_{i_1}}(x)$ в некоторой области $D\subset\mathbb{R}^n$, и у неё существует частная производная по переменной x_{i_n} в точке $x^0=(x_1^0,...,x_n^0)\in D$, то эта производная $\frac{\partial}{\partial x_{i_n}}(\frac{\partial^{n-1} f}{\partial x_{i_{n-1}}...\partial x_{i_1}})(x^0)$ называется *частной производной* n*-го порядка функции* $f(x)$ *по переменным* $x_{i_1},...,x_{i_n}$ в точке x^0 и обозначается $\frac{\partial^n f}{\partial x_{i_n}\partial x_{i_{n-1}}...\partial x_{i_1}}(x^0)$.

Аналогично частным производным первого порядка, существуют другие обозначения и для частных производных высших порядков. Производные $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i\partial x_k}(x^0)$, $\frac{\partial^n f}{\partial x_{i_n}\partial x_{i_{n-1}}...\partial x_{i_1}}(x^0)$ можно обозначать также $f''_{x_k x_i}$, $f^{(n)}_{x_{i_1}...x_{i_n}}$ соответственно. Если среди переменных $x_{i_1},...,x_{i_n}$ не все совпадают, то такая частная производная n- го порядка называется *смешанной.*

Пример 1. $f(x,y)=arctg\,xy$; $\quad\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{y}{1+x^2y^2}$; $\frac{\partial f}{\partial y}=\frac{x}{1+x^2y^2}$;

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=\frac{\partial}{\partial x}(\frac{x}{1+x^2y^2})=\frac{1-x^2y^2}{\left(1+x^2y^2\right)^2}=\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}$$ (Проверьте самостоятельно!)

Пример 2. Пусть $g(x,y)=\begin{cases} xy\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}, & x^2+y^2>0 \\ 0, & x=y=0 \end{cases}$. Тогда

$$f'_x(x;y)=\begin{cases} y\dfrac{4x^2y^2+x^4-y^4}{\left(x^2+y^2\right)^2}, & x^2+y^2>0 \\ 0, & x=y=0 \end{cases}; \quad f'_y(x;y)=\begin{cases} x\dfrac{-4x^2y^2+x^4-y^4}{\left(x^2+y^2\right)^2}, & x^2+y^2>0 \\ 0, & x=y=0 \end{cases};$$

Следовательно, для смешанных частных производных второго порядка получаем:

$$f''_{xy}(0;0)=\lim_{y\to 0}\frac{f'_x(0;y)-f'_x(0;0)}{y}=-1; \qquad f''_{yx}(0;0)=\lim_{x\to 0}\frac{f'_y(x;0)-f'_y(0;0)}{x}=1.$$

(Проверьте самостоятельно все вычисления!).

Рассмотрим теперь понятие n раз дифференцируемой функции, которое также вводится индуктивно.

Определение 4. Функция $f(x)=f(x_1,...,x_n)$ называется *дважды дифференцируемой в точке* $x^0=(x_1^0,...,x_n^0)$, если она дифференцируема в некоторой окрестности этой точки, и все её частные производные дифференцируемы в точке x^0. Аналогично, если функция $f(x)$ $(n-1)$ раз $(n>1)$ дифференцируема в некоторой окрестности точки x^0, и все её частные производные $(n-1)$-го порядка дифференцируемы в точке x^0, то $f(x)$ называется *n раз дифференцируемой в точке* x^0.

Из определения 4 вытекает следующее достаточное условие для того, чтобы функция была n раз дифференцируема в данной точке.

Утверждение 1. Для того, чтобы функция $f(x)$ была n раз дифференцируема в данной точке $x^0=(x_1^0,...,x_n^0)$, достаточно, чтобы она $(n-1)$ раз была дифференцируема в некоторой окрестности точки x^0, и все ее частные производные n-го порядка были непрерывны в самой точке x^0.

Доказательство. При $n=1$ получаем достаточное условие дифференцируемости функции в точке. Пусть $n>1$. Рассмотрим любую из производных $(n-1)$- го порядка функции $f(x)$. По условию все ее частные производные первого порядка непрерывны в точке x^0 (поскольку они являются производными n-го порядка самой функции $f(x)$). Согласно достаточному условию дифференцируемости, получаем, что любая производная порядка $(n-1)$ функции $f(x)$ дифференцируема в точке x^0. Кроме того, сама функция по условию $(n-1)$ раз дифференцируема в окрестности точки x^0. Следовательно, она n раз дифференцируема в точке x^0, что и требовалось доказать.

Лекция 19.
Теоремы о равенстве смешанных производных

Сформулируем и докажем две теоремы о достаточных условиях равенства смешанных частных производных второго порядка.

Теорема 1 (Юнг). Если функция $f(x,y)$ дважды дифференцируема в точке (x_0,y_0), то $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x_0,y_0)=\dfrac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(x_0,y_0)$.

Доказательство. Условие теоремы означает, что частные производные функции $f(x,y)$ определены в некоторой окрестности, и дифференцируемы в самой этой точке. Пусть приращение h достаточно мало, так что точка (x_0+h, y_0+h) принадлежит указанной окрестности. Рассмотрим выражение

$$\Phi=\Phi(x_0,y_0;h)=f(x_0+h;y_0+h)-f(x_0+h,y_0)-f(x_0,y_0+h)+f(x_0,y_0),$$

которое можно представить следующими двумя способами. Во-первых, так:

$$\Phi=[f(x_0+h;y_0+h)-f(x_0+h,y_0)]-[f(x_0,y_0+h)-f(x_0,y_0)]=\varphi(x_0+h)-\varphi(x_0), \quad (4)$$

где $\varphi(x)=f(x,y_0+h)-f(x,y_0)$. И во-вторых, так:

$$\Phi=[f(x_0+h;y_0+h)-f(x_0,y_0+h)]-[f(x_0+h,y_0)-f(x_0,y_0)]=\psi(y_0+h)-\psi(y_0), \quad (5)$$

где $\psi(y)=f(x_0+h,y)-f(x_0,y)$.

Применяя теорему Лагранжа к дифференцируемой функции $\varphi(x)$ на интервале $(x_0;x_0+h)$, из (4) получаем:

$$\Phi=\varphi_x'(x_0+\theta h)\cdot h=[f_x'(x_0+\theta h,y_0+h)-f_x'(x_0+\theta h,y_0)]\cdot h=$$
$$=[f_x'(x_0+\theta h,y_0+h)-f_x'(x_0,y_0)]\cdot h-[f_x'(x_0+\theta h,y_0)-f_x'(x_0,y_0)]\cdot h,$$

где $\theta\in(0;1)$.

Далее, в последнем выражении в квадратных скобках стоят приращения дифференцируемой в точке (x_0,y_0) функции f_x', которые можно представить следующим образом:

$$[f_x'(x_0+\theta h,y_0+h)-f_x'(x_0,y_0)]=f_{xx}''(x_0,y_0)\theta h+f_{xy}''(x_0,y_0)h+\alpha_1\theta h+\alpha_2 h;$$
$$[f_x'(x_0+\theta h,y_0)-f_x'(x_0,y_0)]=f_{xx}''(x_0,y_0)\theta h+\alpha_3 h,$$

где $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ - бесконечно малые при $h\to 0$. Подставляя полученные выражения в формулу для Ф, получаем:

$$\Phi=f_{xx}''(x_0,y_0)\theta h^2+f_{xy}''(x_0,y_0)h^2+(\alpha_1\theta h+\alpha_2 h)h-f_{xx}''(x_0,y_0)\theta h^2-\alpha_3 h^2.$$

Таким образом,

$$\Phi=f_{xy}''(x_0,y_0)h^2+\bar{o}(h^2),\quad h\to 0.$$

Совершенно аналогично, используя представление (5) , получаем:

$$\Phi=\psi_y'(y_0+\tilde{\theta}h)\cdot h=[f_y'(x_0+h,y_0+\tilde{\theta}h)-f_y'(x_0,y_0+\tilde{\theta}h)]\cdot h=$$
$$=[f_y'(x_0+h,y_0+\tilde{\theta}h)-f_y'(x_0,y_0)]\cdot h-[f_y'(x_0,y_0+\tilde{\theta}h)-f_y'(x_0,y_0)]\cdot h=$$
$$f_{yx}''(x_0,y_0)h^2+f_{yy}''(x_0,y_0)\tilde{\theta}h^2+(\beta_1 h+\beta_2\tilde{\theta}h)h-f_{yy}''(x_0,y_0)\tilde{\theta}h^2-\beta_3 h^2.$$

Поэтому, уничтожая слагаемые с противоположными знаками, имеем:

$$\Phi=f_{yx}''(x_0,y_0)h^2+\bar{o}(h^2),\quad h\to 0.$$

Поделив на h^2 и приравнивая правые части данных соотношений, получим:

$$f_{xy}''(x_0,y_0)+\bar{o}(1)=f_{yx}''(x_0,y_0)+\bar{o}(1),$$

откуда и следует искомое равенство: $f''_{yx}(x_0, y_0) = f''_{xy}(x_0, y_0)$, так как разность $f''_{yx}(x_0, y_0) - f''_{xy}(x_0, y_0)$ есть бесконечно малая величина. Теорема доказана.

Теорема 2 (Шварц). Если у функции $f(x, y)$ в некоторой окрестности точки (x_0, y_0) существуют частные производные $f'_x, f'_y, f''_{yx}, f''_{xy}$, причём производные f''_{yx}, f''_{xy} непрерывны в точке (x_0, y_0), то имеет место равенство: $f''_{yx}(x_0, y_0) = f''_{xy}(x_0, y_0)$.

Доказательство. Используем выражение Φ и некоторые выкладки из доказательства теоремы 1. Из условия теоремы о существовании частной производной f''_{xy}, применяя теорему Лагранжа, получаем:

$$\Phi = [f'_x(x_0 + \theta h, y_0 + h) - f'_x(x_0 + \theta h, y_0)] \cdot h = f''_{xy}(x_0 + \theta h, y_0 + \theta_1 h) \cdot h^2,$$

где $\theta_1 \in (0;1)$.

С другой стороны, поменяв ролями x и y и снова применяя теорему Лагранжа, имеем:

$$\Phi = [f'_y(x_0 + h, y_0 + \tilde{\theta} h) - f'_y(x_0, y_0 + \tilde{\theta} h)] \cdot h = f''_{yx}(x_0 + \theta_2 h, y_0 + \tilde{\theta} h) \cdot h^2,$$

где $\theta_2 \in (0;1)$.

Поделив на h^2 и приравнивая правые части полученных выражений, приходим к равенству:

$$f''_{yx}(x_0 + \theta_2 h, y_0 + \tilde{\theta} h) = f''_{xy}(x_0 + \theta h, y_0 + \theta_1 h).$$

При переходе к пределу при $h \to 0$, в силу условия непрерывности этих производных в точке (x_0, y_0), получаем искомое равенство: $f''_{yx}(x_0, y_0) = f''_{xy}(x_0, y_0)$. Теорема полностью доказана.

Из теоремы 1 выведем достаточное условие равенства смешанных производных высших порядков.

Теорема 3. Пусть функция $f(x)$ m раз ($m > 2$) дифференцируема в точке x^0. Тогда её частные производные m- го порядка не зависят от порядка последовательного выполнения операций дифференцирования.

Доказательство. Достаточно показать, что производная $\dfrac{\partial^m f}{\partial x_{i_m} \ldots \partial x_{i_{k+1}} \partial x_{i_k} \ldots \partial x_{i_1}}(x^0)$ не зависит от перестановки двух соседних операций дифференцирования, то есть доказать равенство:

$$\frac{\partial^m f}{\partial x_{i_m} \ldots \partial x_{i_{k+1}} \partial x_{i_k} \ldots \partial x_{i_1}}(x^0) = \frac{\partial^m f}{\partial x_{i_m} \ldots \partial x_{i_k} \partial x_{i_{k+1}} \ldots \partial x_{i_1}}(x^0).$$

С этой целью рассмотрим функцию $F(x) = \dfrac{\partial^{k-1} f}{\partial x_{i_{k-1}} \ldots \partial x_{i_1}}(x), 1 < k < m$. Из условия теоремы следует, что

1) при $1 < k < m-1$ функция $F(x)$ дважды дифференцируема в некоторой окрестности точки x^0;

2) при $k = m-1$ функция $F(x)$ дважды дифференцируема в точке x^0.

Но тогда, по теореме 1, её смешанные частные производные $\dfrac{\partial^2 F}{\partial x_{i_k} \partial x_{i_{k+1}}}, \dfrac{\partial^2 F}{\partial x_{i_{k+1}} \partial x_{i_k}}$ при $1 < k < m-1$ тождественно совпадают в некоторой окрестности точки x^0, а при $k = m-1$ они совпадают в точке x^0. Это означает, что:

1) $\dfrac{\partial^{k+1} f}{\partial x_{i_{k+1}} \partial x_{i_k} ... \partial x_{i_1}} = \dfrac{\partial^{k+1} f}{\partial x_{i_k} \partial x_{i_{k+1}} ... \partial x_{i_1}}$ при $1 < k < m-1$ в некоторой окрестности точки x^0, откуда при дальнейшем дифференцировании по остальным переменным $x_{i_{k+2}},...,x_{i_m}$ получается нужное равенство;

2) при $k = m-1$ равенство $\dfrac{\partial^{k+1} f}{\partial x_{i_{k+1}} \partial x_{i_k} ... \partial x_{i_1}} = \dfrac{\partial^{k+1} f}{\partial x_{i_k} \partial x_{i_{k+1}} ... \partial x_{i_1}}$ в точке x^0 совпадает с искомым равенством.

Теорема доказана.

Из теоремы 3 вытекает следующее простое утверждение.

Следствие. Если функция $f(x)$ m раз ($m \geq 2$) дифференцируема в точке x^0, то её частные производные m-го порядка можно записывать в следующей форме: $\dfrac{\partial^m f}{(\partial x_n)^{\alpha_n} ... (\partial x_1)^{\alpha_1}}$, где $0 \leq \alpha_j \leq m,\ \alpha_1 + ... + \alpha_n = m.$

Дифференциалы высших порядков.

Ранее мы рассматривали инвариантную форму записи (первого) дифференциала функции $f(x) = f(x_1,...,x_n)$. При этом сам оператор дифференцирования имеет, очевидно, вид:

$$d = (\nabla, dx) = \frac{\partial}{\partial x_1} dx_1 + ... + \frac{\partial}{\partial x_n} dx_n .$$

Предположим, что после применения к функции $f(x)$ оператора дифференцирования d получается снова дифференцируемая функция $df(x)$ (в данной точке или на данном множестве). Для этого достаточно предположить, что функция $f(x)$ дважды дифференцируема (в точке или на множестве), а переменные $x_1,...,x_n$ либо независимы, либо тоже представляют собой дважды дифференцируемые функции (в соответствующей точке или на соответствующем множестве). Тогда к функции $df(x)$ можно снова применить оператор дифференцирования, который (в аналогичной инвариантной форме записи) можно обозначить для удобства другой буквой, например, так: $\delta = (\nabla, \delta x) = \dfrac{\partial}{\partial x_1} \delta x_1 + ... + \dfrac{\partial}{\partial x_n} \delta x_n$. Композиция этих двух операторов имеет вид:

$$\delta(df) = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\frac{\partial f}{\partial x_1} dx_1 + ... + \frac{\partial f}{\partial x_n} dx_n \right) \cdot \delta x_k . \qquad (1)$$

Определение 1. *Вторым дифференциалом* функции $f(x)$ в точке x^0 называется величина $d^2 f(x^0) = \delta(df)(x^0)$ - значение композиции (1), взятое при равенстве: $\delta x = \{\delta x_1,...\delta x_n\} = \{dx_1,...,dx_n\} = dx$, где все частные производные вычислены в точке x^0, то есть выражение:

$$d^2 f = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\frac{\partial f}{\partial x_1} dx_1 + ... + \frac{\partial f}{\partial x_n} dx_n \right) \cdot dx_k . \qquad (2)$$

По индукции, если определён (и дифференцируем) дифференциал $d^{n-1} f(x)$, то *n-ым дифференциалом (дифференциалом n-го порядка)* функции $f(x)$ в точке x^0 называется величина $d^n f(x^0) = \delta(d^{n-1} f)(x^0)$ - значение композиции $\delta(d^{n-1} f)$, взятое при равенстве: $\delta x = \{\delta x_1,...\delta x_n\} = \{dx_1,...,dx_n\} = dx$, где все частные производные вычислены в точке x^0.

Замечание. Пусть переменные $x_1,...,x_n$ независимы или являются линейными функциями. (*Под линейной функцией* n *независимых переменных понимают функцию вида* $x_i(t_1,...,t_k)=\sum_{j=1}^{k}a_{ij}t_j$, где коэффициенты $a_{ij}\in\mathbb{R}$). Тогда все их дифференциалы, кроме первого, равны нулю, поскольку равны нулю все частные производные второго и более высоких порядков. В этих случаях форма записи для дифференциалов высших порядков существенно упрощается.

Более конкретно, отметим по этому поводу следующее:

1) $d^2f(x^0)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}f''_{x_ix_j}(x^0)dx_idx_j$ - квадратичная форма от переменных $dx_1,...,dx_n$. Эта квадратичная форма симметрична, если участвующие в ней частные производные не зависят от порядка последовательного дифференцирования.

Например, если $f(x,y)$ - функция двух переменных, дважды дифференцируемая в точке (x_0,y_0), то выражение для ее второго дифференциала имеет вид

$$d^2f(x_0,y_0)=f''_{xx}(x_0,y_0)dx^2+2f''_{xy}(x_0,y_0)dxdy+f''_{yy}(x_0,y_0)dy^2.$$

Для функции трех переменных справедлива аналогичная формула:

$$d^2f|_{M_0}=f''_{xx}(M_0)dx^2+f''_{yy}(M_0)dy^2+f''_{zz}(M_0)dz^2+2(f''_{xy}(M_0)dxdy+f''_{xz}(M_0)dxdz+f''_{yz}(M_0)dydz),$$

где $M_0(x_0,y_0,z_0)$, функция $f(x,y,z)$ дважды дифференцируема в точке M_0.

2) Если переменные $x_1,...,x_n$ независимы или являются линейными функциями, а функция $f(x)$ m раз дифференцируема в точке x^0, то для дифференциалов высших порядков верно равенство:

$$d^mf=(\frac{\partial}{\partial x_1}dx_1+...+\frac{\partial}{\partial x_n}dx_n)^mf=(\nabla,dx)^mf,\ m\geq 1. \quad (3)$$

Лекция 20.

Формула Тейлора для функции многих переменных.

Для функций многих переменных, аналогично случаю одной переменной, имеет место формула Тейлора. В этом разделе мы будем рассматривать функции n независимых переменных.

Теорема 1. (*Формула Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа*). Пусть функция $f(x) = f(x_1,...,x_n)$ $(m+1)$ раз дифференцируема в некоторой окрестности $B_\delta(x^0)$ точки $x^0 = (x_1^0,...,x_n^0)$. Тогда для всякого $x \in B_\delta(x^0)$, приращение функции $\Delta f = f(x) - f(x^0)$ представимо в виде:

$$\Delta f = f(x) - f(x^0) = df(x^0) + \frac{d^2 f(x^0)}{2!} + ... + \frac{d^m f(x^0)}{m!} + R_m, \tag{1}$$

где остаточный член имеет вид (называемый *остаточным членом в форме Лагранжа*):

$$R_m = \frac{d^{m+1} f(x^0 + \theta\Delta x)}{(m+1)!}, \ \theta \in (0;1), \ \Delta x = x - x^0. \tag{2}$$

Доказательство. Рассмотрим сложную функцию

$$F(t) = f(x^0 + t\Delta x) = f(x_1^0 + t\Delta x_1, \ ..., \ x_n^0 + t\Delta x_n).$$

Эта функция, в силу условий теоремы, удовлетворяет всем требованиям для представления её по формуле Маклорена при $t_0 = 0, t = 1, \ \Delta t = 1$. Таким образом, можно записать:

$$F(1) - F(0) = F'(0) + \frac{F''(0)}{2!} + ... + \frac{F^{(m)}(0)}{m!} + \frac{F^{(m+1)}(\theta)}{(m+1)!}.$$

Заметим, что поскольку внутренние функции $x_k(t) = x_k^0 + t\Delta x_k$ являются линейными, то производные сложной функции $F(t)$ в точке $t_0 = 0$ легко вычисляются и имеют вид:

$$F'(0) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(x^0) \cdot \Delta x_i = df(x^0),$$

$$F''(0) = \sum_{j-1}^{n} \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x^0) \Delta x_i \Delta x_j = d^2 f(x^0),$$

$$...$$

$$F^{(m)}(0) = d^m f(x^0),$$

$$F^{(m+1)}(\theta) = d^{m+1} f(x^0 + \theta\Delta x).$$

Подставляя эти равенства в представление для функции F, получаем и искомую формулу (1), и формулу для остаточного члена (2), что и требовалось. Теорема доказана.

Следствие. (*Формула Тейлора с остаточным членом в интегральной форме*).
Пусть выполнены все условия теоремы 1, и пусть, сверх того, все частные производные $(m+1)$-го порядка функции $f(x) = f(x_1,...,x_n)$ непрерывны в некоторой шаровой окрестности точки $x^0 = (x_1^0,...,x_n^0)$. Тогда остаточный член R_m в формуле (1) может быть представлен в виде:

$$R_m = \frac{1}{m!} \int_0^1 (1-t)^m d^{m+1} f(x^0 + t\Delta x) dt.$$

Доказательство. Покажем сначала справедливость соотношения:

$$R_m = \frac{F^{(m+1)}(\theta)}{(m+1)!} = \frac{1}{m!} \int_0^1 F^{(m+1)}(t)(1-t)^m dt.$$

С этой целью применим к очевидному равенству: $F(1) = F(0) + \int_0^1 F'(t)dt$ формулу интегрирования по частям, учитывая, что $dt = d(-(1-t))$. Получим:

$$\Delta F = F(1) - F(0) = \int_0^1 F'(t)dt = F'(t)[-(1-t)]\Big|_0^1 + \int_0^1 F''(t)(1-t)dt = F'(0) + \int_0^1 F''(t)(1-t)dt .$$

К последнему интегралу $\int_0^1 F''(t)(1-t)dt$ снова применим формулу интегрирования по частям, имея в виду равенство: $(1-t)dt = d(-\frac{1}{2}(1-t)^2)$. Тогда получим:

$$\Delta F = F'(0) + F''(t)[-\frac{1}{2}(1-t)^2]\Big|_0^1 + \frac{1}{2}\int_0^1 F'''(t)(1-t)^2 dt = F'(0) + \frac{1}{2}F''(0) + \frac{1}{2}\int_0^1 F'''(t)(1-t)^2 dt .$$

И так далее, применяя снова и снова формулу интегрирования по частям к получающемуся интегралу, в итоге придём к формуле:

$$\Delta F = F'(0) + \frac{1}{2}F''(0) + ... + \frac{F^{(m)}(0)}{m!} + \frac{1}{m!}\int_0^1 F^{(m+1)}(t)(1-t)^m dt ,$$

Теперь, подставляя вместо производных функции F соответствующие дифференциалы функции f, получаем искомую формулу с остаточным членом в интегральной форме. Следствие доказано.

Теперь рассмотрим разложение функции по формуле Тейлора при более слабых условиях, и ещё одну форму остаточного члена - форму Пеано.

Теорема 2. *(Формула Тейлора с остаточным членом в форме Пеано).* Пусть m - целое число, $m \geq 1$. Пусть функция $f(x) = f(x_1,...,x_n)$ $m-1$ раз дифференцируема в некоторой окрестности $B_\delta(x^0)$ точки $x^0 = (x_1^0,...,x_n^0)$, и m раз дифференцируема в самой точке $x^0 = (x_1^0,...,x_n^0)$. Тогда для любой точки $x,\ x \in B_\delta(x^0)$, верна формула:

$$\Delta f = f(x) - f(x^0) = df(x^0) + \frac{d^2 f(x^0)}{2!} + ... + \frac{d^m f(x^0)}{m!} + R_m ,$$

где остаточный член имеет вид (называемый *остаточным членом в форме Пеано*):

$$R_m = \bar{o}(\rho^m), \quad \rho \to 0, \quad \rho = \|\Delta x\|.$$

Замечание. Обозначим через $g_m(x)$ функцию:

$$g_m(x) = f(x) - f(x^0) - \left(df(x^0) + \frac{d^2 f(x^0)}{2!} + ... + \frac{d^m f(x^0)}{m!}\right).$$

Для доказательства теоремы 2 теперь достаточно установить, что при выполнении условий этой теоремы имеет место равенство: $g_m(x) = \bar{o}(\rho^m)$.

Сначала сформулируем и докажем две вспомогательные леммы.

Лемма 1. Если функция $f(x) = f(x_1,...,x_n)$ m раз дифференцируема в точке $x^0 = (x_1^0,...,x_n^0)$, то как сама функция $g_m(x)$, так и все ее частные производные по любым переменным $x_1,...,x_n$ до порядка m включительно обращаются в нуль в точке x^0.

Доказательство леммы 1. При $m=1$ функция $g_m(x)$ принимает вид:

$$g_1(x) = f(x) - f(x^0) - (x_1 - x_1^0)\frac{\partial f}{\partial x_1}(x^0) - ... - (x_n - x_n^0)\frac{\partial f}{\partial x_n}(x^0),$$

и равенства: $g_1(x^0) = 0,\ \frac{\partial g_1}{\partial x_i}(x^0) = 0$ при всех $i = 1, 2, ..., n$ проверяются элементарно.

Для проведения индукции предположим, что лемма справедлива для некоторого номера $m \geq 1$, и докажем, что в таком случает она справедлива и для номера $m+1$.

Пусть функция $f(x) = f(x_1,...,x_n)$ $m+1$ раз дифференцируема в точке $x^0 = (x_1^0,...,x_n^0)$, и

$$g_{m+1}(x) = f(x) - f(x^0) \ -\left(df(x^0) + \frac{d^2 f(x^0)}{2!} + \ldots + \frac{d^{m+1} f(x^0)}{(m+1)!}\right).$$

Легко видеть, что $g_{m+1}(x) = 0$ (достаточно учесть, что каждая круглая скобка $(x_i - x_i^0)$ обращается в нуль в точке x^0).

Выберем произвольное $l = 1, 2, \ldots, n$. Нам нужно показать, что функция $\frac{\partial g_{m+1}}{\partial x_l}(x^0)$ и все её частные производные до порядка m включительно обращаются в нуль в точке x^0. Проведем ряд преобразований:

$$\frac{\partial g_{m+1}}{\partial x_l}(x) = \frac{\partial f}{\partial x_l}(x) - \frac{\partial}{\partial x_l}\left(\sum_{j=1}^{m+1}\frac{1}{j!}\sum_{k_1=1}^{n}\ldots\sum_{k_j=1}^{n}\frac{\partial^j}{\partial x_{k_j}\ldots\partial x_{k_1}} f(x)\Big|_{x=x^0}\left(x_{k_1} - x_{k_1}^0\right)\ldots\left(x_{k_j} - x_{k_j}^0\right)\right) =$$

$$= \frac{\partial f}{\partial x_l}(x) - \frac{\partial}{\partial x_l}\left(\sum_{j=1}^{m+1}\frac{1}{j!} j\sum_{k_1=1}^{n}\ldots\sum_{k_{j-1}=1}^{n}\frac{\partial^{j-1}}{\partial x_{k_{j-1}}\ldots\partial x_{k_1}}\left(\frac{\partial f}{\partial x_l}(x)\right)\Big\|_{x=x^0}\left(x_{k_1} - x_{k_1}^0\right)\ldots\left(x_{k_{j-1}} - x_{k_{j-1}}^0\right)\left(x_l - x_l^0\right)\right) =$$

$$= \frac{\partial f}{\partial x_l}(x) - \frac{\partial f}{\partial x_l}(x_0) - \left(\sum_{j=2}^{m+1}\frac{1}{(j-1)!}\sum_{k_1=1}^{n}\ldots\sum_{k_{j-1}=1}^{n}\frac{\partial^{j-1}}{\partial x_{k_{j-1}}\ldots\partial x_{k_1}}\left(\frac{\partial f}{\partial x_l}(x)\right)\Big\|_{x=x^0}\left(x_{k_1} - x_{k_1}^0\right)\ldots\left(x_{k_{j-1}} - x_{k_{j-1}}^0\right)\right) =$$

$$= \frac{\partial f}{\partial x_l}(x) - \frac{\partial f}{\partial x_l}(x_0) - \left(\sum_{j=1}^{m}\frac{1}{j!} d^j\left(\frac{\partial f(x^0)}{\partial x_l}\right)\right).$$

Значит, функция $\frac{\partial g_{m+1}}{\partial x_l}(x)$ имеет вид:

$$\frac{\partial g_{m+1}}{\partial x_l}(x) = \tilde{f}(x) - \tilde{f}(x^0) - \left(d\tilde{f}(x^0) + \frac{d^2 \tilde{f}(x^0)}{2!} + \ldots + \frac{d^m \tilde{f}(x^0)}{m!}\right),$$

где функция $\tilde{f}(x) = \frac{\partial f(x)}{\partial x_l}$ m раз дифференцируема в точке x^0. Значит, согласно предположению индукции, она сама и все ее частные производные до порядка m включительно обращаются в ноль в данной точке. Поскольку число l было выбрано произвольным от 1 до n, то тем самым мы доказали, что у функции $g_{m+1}(x)$ все частные производные до порядка $m+1$ включительно обращаются в ноль в точке x^0. Индукция закончена. Лемма 1 доказана.

Лемма 2. Пусть $g(x) = g(x_1, \ldots, x_n)$ – произвольная функция, удовлетворяющая двум требованиям:

1) $g(x)$ m раз дифференцируема в точке $x^0 = (x_1^0, \ldots, x_n^0)$;

2) сама функция $g(x)$ и все ее частные производные по любым переменным $x_1, \ldots, x_n$; до порядка m включительно обращаются в нуль в указанной точке x^0.

Тогда для функции $g(x)$ в достаточно малой окрестности точки x^0 справедлива оценка:

$$g(x) = \bar{o}(\rho^m), \text{ где } \rho = \|x - x_0\|.$$

Доказательство леммы 2. При $m = 1$ утверждение леммы вытекает из условия дифференцируемости функции $g(x)$ в точке x^0, которое имеет вид:

$$g(x) - g(x^0) = \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial g}{\partial x_i}(x^0)(x_i - x_i^0) + \bar{o}(\rho).$$

В самом деле, так как $g(x^0) = 0$, и $\frac{\partial g}{\partial x_i}(x^0)$=0 для всех $i = 1, \ldots, n$, то получается, что $g(x) = \bar{o}(\rho)$.

Для проведения индукции предположим, что лемма 2 справедлива для некоторого номера $m \geq 1$, и докажем, что в таком случает она справедлива и для номера $m+1$.

Пусть функция $g(x)$ удовлетворяет двум требованиям леммы 2 для номера $m+1$. Тогда, очевидно, любая частная производная этой функции первого порядка $\frac{\partial g}{\partial x_i}(x)$, $i=1,...,n$, будет удовлетворять двум требованиям леммы 2 для номера m, а поэтому, по предположению индукции, будет справедлива оценка:

$$\frac{\partial g}{\partial x_i}(x)=\bar{o}(\rho^m).$$

Заметим теперь, что поскольку $m\geq 1$, то $m+1\geq 2$, и функция $g(x)$, удовлетворяющая двум требованиям леммы для номера $m+1$, во всяком случае, хотя бы один раз дифференцируема в окрестности точки x^0. Поэтому для $g(x)$ выполнены условия теоремы 1 для номера $m=0$. По указанной теореме, для любой точки x из достаточно малой ε-окрестности точки x^0 найдется число $\theta\in(0,1)$ такое, что справедлива формула:

$$g(x)=g(x^0)+dg(x^0+\theta(x-x^0))=g(x^0)+\frac{1}{1!}\sum_{i=1}^{n}(x_i-x_i^0)\frac{\partial g}{\partial x_i}(x^0+\theta(x-x^0))$$

(формула Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа).

Заметим, что поскольку точка $\xi=x^0+\theta(x-x^0)$ лежит между точками x^0 и x, то $\|\xi-x^0\|<\rho=\|x-x^0\|$, и поэтому $\frac{\partial g}{\partial x_i}(\xi)=\bar{o}(\|\xi-x^0\|^m)\leq\bar{o}(\rho^m)$.

Подставляя последнюю оценку в правую часть тейлоровского разложения и учитывая, что $g(x^0)=0$, мы получим $g(x)=\bar{o}(\rho^m)\sum_{i=1}^{n}|x_i-x_i^0|$. А так как $|x_i-x_i^0|\leq\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i-x_i^0)^2}=\rho$, то окончательно получаем, что $g(x)=\bar{o}(\rho^{m+1})$. Индукция завершена. Лемма 2 доказана.

Доказательство теоремы 2. Утверждение теоремы легко следует из доказанных лемм 1 и 2. Как уже отмечалось выше, для доказательства теоремы 2 достаточно показать, что при выполнении условий теоремы справедлива оценка $g_m(x)=\bar{o}(\rho^m)$.

В силу леммы 1 сама функция $g_m(x)$ и все ее частные производные по любым переменным $x_1,...,x_n$ до порядка m включительно обращаются в нуль в точке x^0. Но тогда в силу леммы 2, справедлива искомая оценка: $g_m(x)=\bar{o}(\rho^m)$. Теорема доказана.

Лекция 21.

Локальный экстремум функции многих переменных.

Определение 1. Точка $x^0 = (x_1^0,...,x_n^0)$, внутренняя для области определения функции $f(x) = f(x_1,...,x_n)$ называется её *точкой локального экстремума*, если для любой точки некоторой её окрестности $B_\delta(x^0)$ (за исключением самой точки x^0) разность $\Delta f = f(x) - f(x^0)$ отлична от нуля и сохраняет знак. В частности, если $\Delta f > 0$, то это точка *локального минимума*, а если $\Delta f < 0$, то точка *локального максимума*.

Теорема 1. (*Необходимое условие существования локального экстремума).* Если у функции $f(x)$ в точке x^0 существуют все частные производные f'_{x_k}, и эта точка является точкой локального экстремума, то все частные производные в ней равны нулю, то есть $f'_{x_k}(x^0) = 0,\ k = 1,...,n.$

Доказательство. Зафиксируем у функции $f(x)$ все переменные, кроме x_k $(1 \le k \le n)$, и рассмотрим функцию одной переменной $\varphi(x_k) = f(x_1^0,..,x_{k-1}^0, x_k, x_{k+1}^0,...,x_n^0)$. Очевидно, что для функции $\varphi(x_k)$ точка x_k^0 является также точкой локального экстремума. Как известно из материала первого семестра, производная функции одной переменной в точке локального экстремума равна нулю. Поэтому $\varphi'(x_k^0) = f'_{x_k}(x^0) = 0$, что и требовалось доказать.

Определение 2. Точка $x^0 = (x_1^0,...,x_n^0)$ называется *стационарной* для функции $f(x) = f(x_1,...,x_n)$, если она внутренняя для её области определения, и все частные производные в ней определены, и $f'_{x_k}(x^0) = 0 \quad (k = 1,...,n)$.

Однако одно только условие равенства нулю всех частных производных не является достаточным условием для существования в данной точке локального экстремума.

Пример. Рассмотрим функцию $f(x, y) = xy$. Её частные производные в точке $(0,0)$, очевидно, равны нулю. Но разность $\Delta f = f(x, y) - f(0,0) = xy - 0$ больше нуля при одинаковых знаках x и y, и меньше нуля, если у них разные знаки. Таким образом, локального экстремума в точке $(0,0)$ у этой функции нет.

Определение 3. *Квадратичной формой* переменных $(h_1, h_2, ..., h_n)$ называется функция

$$A(h_1, h_2, ..., h_n) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} h_i h_j.$$

Здесь $a_{ij} \in \mathbb{R}$ - коэффициенты квадратичной формы. Квадратичная форма называется *симметричной*, если $a_{ij} = a_{ji}$ для всех индексов $1 \le i, j \le n$.

Квадратичная форма $A(h_1, h_2, ..., h_n)$ называется *положительно определенной,* если для любого набора переменных, кроме тождественно нулевого, выполнено неравенство: $A(h_1, h_2, ..., h_n) > 0$. Квадратичная форма $A(h_1, h_2, ..., h_n)$ называется *отрицательно определенной,* если для любого набора переменных, кроме тождественно нулевого, выполнено неравенство: $A(h_1, h_2, ..., h_n) < 0$. Такие формы называются *знакоопределенными.*

Квадратичная форма $A(h_1, h_2, ..., h_n)$ называется *знакопеременной,* если существуют два набора переменных $(h'_1, h'_2, ..., h'_n)$ и $(h''_1, h''_2, ..., h''_n)$, для которых выполнены неравенства:

$$A(h'_1, h'_2, ..., h'_n) > 0, A(h''_1, h''_2, ..., h''_n) < 0.$$

Замечание. Квадратичная форма может не являться ни знакоопределенной, ни знакопеременной. Например, $A(h_1, h_2) = (h_1 - h_2)^2 \ge 0$ при всех значениях переменных h_1, h_2, однако она обращается в ноль на ненулевых наборах переменных: $A(h, h) = 0$.

Теорема 2. *(Достаточные условия локального экстремума)*. Пусть функция $f(x) = f(x_1,...,x_n)$ n независимых переменных 1 раз дифференцируема в некоторой окрестности точки $x^0 = (x_1^0,...,x_n^0)$, и дважды дифференцируема в самой точке x^0. Пусть x^0 - стационарная точка, то есть $df(x^0) = 0$. Тогда, если второй дифференциал $d^2 f(x^0)$ представляет собой знакоопределённую квадратичную форму, то x^0 - точка локального экстремума. При этом, если форма $d^2 f(x^0)$ положительно определена, то x^0 - точка локального минимума, если $d^2 f(x^0)$ отрицательно определена, то x^0 - точка локального максимума. Если же квадратичная форма $d^2 f(x^0)$ знакопеременна, то локального экстремума в точке x^0 нет.

Доказательство. Разложим разность Δf по формуле Тейлора при $n = 2$ с остаточным членом в форме Пеано:

$$\Delta f = f(x) - f(x^0) = df(x^0) + \frac{d^2 f(x^0)}{2!} + \bar{o}(\|\Delta x\|^2) = \frac{1}{2!}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} f''_{x_i x_j}(x^0)\Delta x_i \Delta x_j + \bar{o}(\|\Delta x\|^2).$$

Обозначим $h_i = \dfrac{\Delta x_i}{\|\Delta x\|}$, $\quad f''_{x_i x_j}(x^0) = a_{ij}$, $\quad \alpha = \alpha(\|\Delta x\|) = \dfrac{\bar{o}(\|\Delta x\|^2)}{\|\Delta x\|^2}$ - бесконечно малая при $\|\Delta x\| \to 0$. Тогда $\Delta f = \dfrac{1}{2}\|\Delta x\|^2 \left(\sum\limits_{1 \le i, j \le n} a_{ij} \cdot h_i h_j + \alpha \right)$. Заметим, что вектор $h = \{h_1,...,h_n\}$ имеет норму $\|h\| = \sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n} h_i^2} = 1$, то есть это элемент единичной сферы.

Рассмотрим случай, когда $d^2 f(x^0)$ - положительно определённая квадратичная форма. Тогда функция $\Phi(h) = \sum\limits_{1 \le i, j \le n} a_{ij} h_i h_j$ - также положительно определённая непрерывная функция на единичной сфере S, которая является замкнутым ограниченным множеством. Следовательно, по второй теореме Вейерштрасса, функция $\Phi(h)$ достигает на S своей точной нижней грани, то есть существует точка $\xi = (\xi_1,...,\xi_n) \in S$, где $\Phi(\xi) = \inf\limits_{h \in S}\{\Phi(h)\} = \mu$. Поскольку всюду на сфере $\Phi(h) > 0$, то и $\Phi(\xi) = \mu > 0$. Воспользовавшись этим, получаем: $\Delta f = \dfrac{1}{2}\|\Delta x\|^2 (\Phi(h) + \alpha) \ge \dfrac{1}{2}\|\Delta x\|^2 (\mu + \alpha)$. Так как $\alpha \to 0$ при $\|\Delta x\| \to 0$, то найдётся такое $\delta = \delta(\mu) > 0$, что при $\|\Delta x\| < \delta$ будет $|\alpha| < \dfrac{\mu}{2}$. При этих условиях

$$\Delta f \ge \frac{1}{2}\|\Delta x\|^2 (\mu + \alpha) > \frac{1}{2}\|\Delta x\|^2 (\mu - \frac{\mu}{2}) = \frac{1}{2}\|\Delta x\|^2 \frac{\mu}{2} > 0.$$

Итак, для любого x такого, что $\|\Delta x\| < \delta$, всегда будет $\Delta f > 0$. Следовательно, точка x^0 - точка локального минимума.

В случае отрицательно определённой квадратичной формы $d^2 f(x^0)$ совершенно аналогично доказывается, что точка x^0 - точка локального максимума.

Пусть теперь $d^2 f(x^0)$ - знакопеременная квадратичная форма. Тогда, пользуясь предыдущими обозначениями, $\Delta f = \dfrac{1}{2}\rho^2 (\Phi(h) + \alpha)$, где $\rho = \|\Delta x\|$, а $\Phi(h)$ - знакопеременная квадратичная форма на единичной сфере S.

Следовательно, существуют такие точки $h', h'' \in S$, что $\Phi(h') < 0, \Phi(h'') > 0$. При этом $\Phi(h)$ не зависит от ρ. Поэтому, взяв ρ_1 достаточно малым, можно добиться, чтобы $|\alpha_1| = |\alpha(\rho_1)| < \min\{\frac{|\Phi(h')|}{2}, \frac{|\Phi(h'')|}{2}\}$ (поскольку $\alpha = \alpha(\rho) \to 0$ при $\rho \to 0$).

При этих условиях будет одновременно: $\Phi(h') + \alpha_1 < 0, \Phi(h'') + \alpha_1 > 0$. Тогда для $x_1 = x^0 + \rho h',\ x_2 = x^0 + \rho h''$ будет выполнено

$$(\Delta f)' = f(x_1) - f(x^0) = \frac{1}{2}\rho^2(\Phi(h') + \alpha_1) < 0, \text{ и}$$

$$(\Delta f)'' = f(x_2) - f(x^0) = \frac{1}{2}\rho^2(\Phi(h'') + \alpha_1) > 0 .$$

Итак, приращение функции меняет знак, следовательно, точка x^0 не является в этом случае точкой экстремума функции $f(x)$. Теорема полностью доказана.

Замечание. В случаях квази-знакоопределённости (или, другими словами, полуопределённости) квадратичной формы второго дифференциала $d^2 f(x^0)$ ответ о существовании локального экстремума в точке x^0 неясен. (Напомним, что квадратичная форма $A(h) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}h_i h_j$ называется *квази-знакоопределённой* (или *полуопределённой*), если $A(h) \geq 0$ при любом $h = (h_1, ..., h_n)$ (или $A(h) \leq 0$ при любом h), и кроме того, существует $h_0 \neq 0$ такой, что $A(h_0) = 0$.)

Пример. Рассмотрим функции $f(x, y) = x^3 + y^3,\ g(x, y) = x^4 + y^4$. В точке (0;0) вторые дифференциалы обеих функций равны нулю. Однако несложно проверить, что у функции $g(x, y)$ имеется экстремум в точке (0;0), а у функции $f(x, y)$ в этой точке экстремума нет.

Случай функции двух переменных. Рассмотрим более подробно частный случай теоремы 2 для функции двух переменных.

Теорема 3. Пусть функция $f(x_1, x_2)$ дифференцируема в некоторой окрестности точки $x^0 = (x_1^0, x_2^0)$ и дважды дифференцируема в самой точке x^0. Пусть точка x^0 является стационарной, то есть $df(x^0) = 0$, а второй дифференциал в этой точке имеет вид:

$$d^2 f(x_0) = a_{11}(dx_1)^2 + 2a_{12}dx_1dx_2 + a_{22}(dx_2)^2 ,$$

где $a_{ij} = f''_{x_i x_j}(x^0), 1 \leq i, j \leq 2$. Тогда, если определитель $A_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix} > 0$, то точка x^0 является точкой локального экстремума (локального минимума, если $a_{11} > 0$, и локального максимума, если $a_{11} < 0$).

Если же $A_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix} < 0$, то экстремума в точке x^0 нет.

Доказательство. Из курса линейной алгебры известен *критерий Сильвестра* знакоопределённости квадратичной формы, заключающийся в следующем: если все главные миноры матрицы симметричной квадратичной формы положительны, то квадратичная форма положительно определена. Если же знаки главных миноров чередуются, начиная с минуса, то квадратичная форма отрицательно определена. В силу этого критерия, при условии $A_2 > 0$ и $a_{11} \neq 0$ второй дифференциал $d^2 f(x^0; dx)$ является знакоопределённой (положительной или отрицательной, в зависимости от знака a_{11}) квадратичной формой. Следовательно, по теореме 2, в этом случае в точке x^0 имеется локальный экстремум.

Можно заметить также, что $A_2 = -D/4$, где D - дискриминант квадратного уравнения $y(h) = a_{11}h^2 + 2a_{12}h + a_{22} = 0$. Если $A_2 > 0$, то $D < 0$, и парабола $y(h)$ расположена либо полностью выше оси абсцисс (если $a_{11} > 0$), либо полностью ниже (если $a_{11} < 0$). Значит, в первом случае $d^2 f(x^0;\, dx) > 0$, следовательно, x^0 - точка локального минимума. Во втором случае x^0 - точка локального максимума.

Пусть теперь $A_2 < 0$. Покажем, что тогда экстремума нет.

Предположим сначала, что $a_{11} \neq 0$. Обозначим, как и в теореме 2, $h_i = \dfrac{dx_i}{\rho},\ i = 1{,}2$, где $\rho = \|dx\| = \sqrt{(dx_1)^2 + (dx_2)^2}$. Тогда

$$d^2 f(x^0; dx) = a_{11}(dx_1)^2 + 2a_{12}dx_1dx_2 + a_{22}(dx_2)^2 = \rho^2(a_{11}(h_1)^2 + 2a_{12}h_1h_2 + a_{22}(h_2)^2) =$$

$$= \frac{\rho^2}{a_{11}}(a_{11}^2(h_1)^2 + 2a_{12}a_{11}h_1h_2 + a_{12}^2(h_2)^2 + (a_{22}a_{11} - a_{12}^2)(h_2)^2) = \frac{\rho^2}{a_{11}}[(a_{11}h_1 + a_{12}h_2)^2 + A_2(h_2)^2].$$

Следовательно, при $h_1 = 1,\ h_2 = 0$ имеем: $d^2 f(x^0; dx) = \dfrac{\rho^2}{a_{11}} \cdot (a_{11})^2 = \rho^2 a_{11}$ - имеет такой же знак, как a_{11}. Однако при $h_1 = -\dfrac{a_{12}}{\sqrt{(a_{11})^2 + (a_{12})^2}},\ h_2 = \dfrac{a_{11}}{\sqrt{(a_{11})^2 + (a_{12})^2}}$ второй дифференциал:

$$d^2 f(x_0; dx) = \frac{\rho^2}{a_{11}} \cdot A_2 \frac{(a_{11})^2}{(a_{11})^2 + (a_{12})^2} = \frac{\rho^2 a_{11} A_2}{(a_{11})^2 + (a_{12})^2}$$

имеет знак, противоположный знаку a_{11}. Таким образом, второй дифференциал является в этом случае знакопеременной квадратичной формой, поэтому, в силу теоремы 2, экстремума нет.

Пусть теперь $A_2 < 0,\ a_{11} = 0$. Заметим, что в этом случае обязательно $a_{12} \neq 0$. Тогда $d^2 f(x^0; dx) = \rho^2 h_2(2a_{12}h_1 + a_{22}h_2)$. Зафиксируем $h_1^0 \neq 0$ и возьмём $|h_2^0|$ настолько малым, чтобы выражение в круглых скобках имело такой же знак, как произведение $a_{12}h_1^0$. Тогда $d^2 f(x^0; \{\rho h_1^0, \rho h_2^0\})$ и $d^2 f(x^0; \{\rho h_1^0, \rho(-h_2^0)\})$ имеют разные знаки, то есть при изменении знака малого h_2^0, знак $d^2 f$ также меняется. Итак, второй дифференциал в данном случае есть знакопеременная квадратичная форма, и по теореме 2, экстремума нет. Теорема 3 полностью доказана.

Пример. Исследуем на экстремум функцию: $f(x, y) = x^2 + xy + y^2 + \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y}$.

Вычислим частные производные первого порядка функции $f(x, y)$:

$$f'_x = 2x + y - \frac{1}{x^2}, \quad f'_y = 2y + x - \frac{1}{y^2}.$$

Тогда необходимыми условиями экстремума являются:

$$\begin{cases} 2x + y - \dfrac{1}{x^2} = 0, \\ 2y + x - \dfrac{1}{y^2} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x^3 - 2y^3 = xy^2 - yx^2, \\ 2y + x - \dfrac{1}{y^2} = 0 \end{cases}.$$

Отсюда получаем, что либо $x = y = \frac{1}{\sqrt[3]{3}}$, либо $2x^2 + 3xy + 2y^2 = 0$. Так как последнее уравнение не имеет решений, то единственной критической точкой является точка $M\left(\frac{1}{\sqrt[3]{3}}, \frac{1}{\sqrt[3]{3}}\right)$.

Вычислим второй дифференциал в точке M. Так как

$$f''_{xx} = 2 + \frac{2}{x^3}; \; f''_{yy} = 2 + \frac{2}{y^3}; \; f''_{xy} = 1,$$

то $d^2 f(x,y)\Big|_M = 8dx^2 + 2dxdy + 8dy^2 > 0$ при любых значениях приращений dx, dy. Поскольку второй дифференциал функции является в точке M положительно определенной квадратичной формой, то по достаточному условию экстремума заключаем, что M - точка локального минимума.

Ответ: $M\left(\frac{1}{\sqrt[3]{3}}, \frac{1}{\sqrt[3]{3}}\right)$ - точка локального минимума.

Лекция 22.
Неявная функция.

Довольно часто при решении задач зависимость переменной y от n переменных $(x_1,...,x_n)$ бывает задана в виде уравнения:

$$F(x_1,...,x_n,y)=0, \qquad (*)$$

где F - некоторая функция $(n+1)$ переменной.

Определение 1. Функция $y=f(x_1,...,x_n)$ называется *неявной функцией, определяемой уравнением* (*) *в области* G, если при подстановке её в уравнение (*) оно обращается в области G в тождество: $F(x_1,...,x_n,\ y(x_1,...,x_n))\equiv 0$.

Пример. Рассмотрим уравнение $F(x,y)=x^2+y^2-1=0$. Легко видеть, что две непрерывные функции, задаваемые формулой: $y_{1,2}=\pm\sqrt{1-x^2}$, являются неявными функциями, определяемыми этим уравнением на отрезке $[-1,1]$. Однако, кроме них, есть бесконечное множество других неявных функций, не являющихся непрерывными, которые можно задавать так:

$$y_A(x)=\begin{cases} +\sqrt{1-x^2}, & x\in A, \\ -\sqrt{1-x^2}, & x\in[0,1]\setminus A, \end{cases}$$

где A – произвольное собственное подмножество отрезке $[-1,1]$.

Рассмотрим вопрос, при каких условиях в окрестности данной точки гарантировано существование единственной непрерывной (и дифференцируемой) неявной функции, определяемой данным функциональным уравнением типа (*).

Теорема 1. *(О существовании и дифференцируемости неявной функции).* Пусть функция $F(x,y)=F(x_1,...,x_n,y)$:

1) определена и дифференцируема в некоторой окрестности V точки $M_0=(x_1^0,...,x_n^0,y^0)$;
2) $F(M_0)=0$;
3) $\dfrac{\partial F}{\partial y}(M_0)\neq 0$;
4) $\dfrac{\partial F}{\partial y}$ непрерывна в точке M_0.

Тогда для любого $\varepsilon>0$ найдётся такое $\delta=\delta(\varepsilon)>0$, что для любого x из $B_\delta(x^0)$, $x^0=(x_1^0,...,x_n^0)$, определена единственным образом функция $f(x)=f(x_1,...,x_n)$, для которой $F(x,\ f(x))=0$, и $\left|f(x)-y^0\right|<\varepsilon$ для любого $x\in B_\delta(x^0)$.

При этом функция $f(x)$ непрерывна и дифференцируема в $B_\delta(x^0)$, и её частные производные вычисляются по формулам:

$$\frac{\partial f}{\partial x_j}=-\frac{F'_{x_j}}{F'_y},\ j=1,...,n.$$

Доказательство. Сначала докажем существование требуемой функции и её единственность. Предположим для определённости, что $\dfrac{\partial F}{\partial y}(M_0)>0$. В силу непрерывности $\dfrac{\partial F}{\partial y}$ в точке M_0 существует окрестность $U(M_0)$, в которой $\dfrac{\partial F}{\partial y}$ также является положительной (можно считать, что $U\subseteq V$, то есть всюду в U функция F дифференцируема). Следовательно, функция F, как функция одной переменной y, монотонно возрастает на пересечении окрестности U с прямой $x = x^0$. Тогда для произвольного числа $\varepsilon > 0$ можно указать точки $M_1(x^0, y^0 - h)$, $M_2(x^0, y^0 + h)$ такие, что $F(M_1) < 0$, а $F(M_2) > 0$, где $h = \varepsilon/2$.

Далее, в плоскостях $y = y^0 - h$ и $y = y^0 + h$ можно выбрать окрестности точек M_1 и M_2 такие, что $F < 0$ в окрестности точки M_1 и $F > 0$ в окрестности точки M_2. Можно считать, что эти окрестности одного и того же радиуса $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$.

Таким образом мы получили цилиндр $C: \begin{cases} y^0 - h \le y \le y^0 + h \\ \left\| x - x^0 \right\|^2 \le \delta \end{cases}$, удовлетворяющий следующим условиям:

1) функция $F(x, y)$ дифференцируема (а значит, и непрерывна) в C;
2) $F(x, y)$ монотонно возрастает в цилиндре C по переменной y;
3) $F(x, y)$ отрицательна на нижнем основании цилиндра C, и положительна на его верхнем основании.

Из условий 1), 2), 3) следует, что для любой точки $x = B_\delta(x^0)$ на интервале $((x, y^0 - h); (x, y^0 + h))$) в цилиндре C существует единственная точка M, в которой $F(M) = 0$. Геометрическое место таких точек представляет собой график искомой неявной функции, которую мы обозначим $y = f(x)$. Единственность этой функции очевидна из её построения, неравенство $\left| f(x) - y^0 \right| < \varepsilon$ - также.

Покажем теперь, что построенная выше неявная функция непрерывна в $B_\delta(x^0)$. При построении функции $y = f(x)$ для произвольного $\varepsilon > 0$ мы подобрали такое число $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, что как только выполнено неравенство $\left\| x - x^0 \right\| < \delta$, для функции $y = f(x)$ немедленно выполняется неравенство: $\left| f(x) - y^0 \right| < \varepsilon$. Это означает непрерывность функции $y = f(x)$ в точке x^0. Непрерывность её в любой другой точке $x^1 \in B_\delta(x^0)$ доказывается совершенно аналогично: достаточно вместо δ взять число $\delta_1 > 0$ такое, что $B_{\delta_1}(x_1) \subset B_\delta(x^0)$.

Докажем теперь дифференцируемость построенной неявной функции. Возьмем произвольную точку $x^1 \in B_\delta(x^0)$. Поскольку функция $y = f(x)$ является решением уравнения $F(x, f(x)) = 0$ всюду в окрестности, то для любой точки $x \in B_\delta(x^0)$ выполнено: $F(x, f(x)) = F(x^1, f(x^1)) = 0$. Обозначим для краткости $y = f(x)$, $y^1 = f(x^1)$ и выразим приращение функции $F(x, y)$ в точке x^1 по определению дифференцируемости:

$$0 = \Delta F = F(x, y) - F(x^1, y^1) = F(x_1^1 + \Delta x_1, ..., x_n^1 + \Delta x_n, y^1 + \Delta y) - F(x_1^1, ..., x_n^1, y^1) =$$
$$= F'_{x_1}\Delta x_1 + ... + F'_{x_n}\Delta x_n + F'_y \Delta y + \alpha_1 \Delta x_1 + ... + \alpha_n \Delta x_n + \beta \Delta y \ ,$$

где $\alpha_1, ..., \alpha_n, \beta$ - бесконечно малые функции при $\Delta x_1 \to 0, \ldots, \Delta x_n \to 0$, $\Delta y \to 0$, и все частные производные вычислены в точке (x^1, y^1).

Заметим, что из непрерывности функции $y = f(x)$ следует, что $\Delta y \to 0$ автоматически при $\Delta x_1 \to 0, \ldots, \Delta x_n \to 0$. Значит, функции $\alpha_1, ..., \alpha_n, \beta$ являются бесконечно малыми при $\Delta x_1 \to 0, \ldots, \Delta x_n \to 0$.

Выразим из последнего соотношения приращение Δy:

$$0 = (F'_{x_1} + \alpha_1)\Delta x_1 + \ldots + (F'_{x_n} + \alpha_n)\Delta x_n + (F'_y + \beta)\Delta y .$$

Следовательно, $\Delta y = -\dfrac{(F'_{x_1} + \alpha_1)}{(F'_y + \beta)}\Delta x_1 - \ldots - \dfrac{(F'_{x_n} + \alpha_n)}{(F'_y + \beta)}\Delta x_n$,

поскольку по условию теоремы $F'_y \neq 0$, следовательно, при достаточно малом β будет также $(F'_y + \beta) \neq 0$. Далее, для всех $j = 1, \ldots, n$ имеем:

$$\frac{F'_{x_j} + \alpha_j}{F'_y + \beta} = \frac{F'_{x_j} + \alpha_j}{F'_y}\left(1 + \frac{\beta}{F'_y}\right)^{-1} = \frac{F'_{x_j} + \alpha_j}{F'_y}\left(1 + \tilde{\beta}\right) = \frac{F'_{x_j}}{F'_y} + \tilde{\alpha}_j ,$$

где $\tilde{\beta}, \tilde{\alpha}_j$ - бесконечно малые при $\Delta x_1 \to 0, \ldots, \Delta x_n \to 0$. Окончательно получаем, что

$\Delta y = -\dfrac{F'_{x_1}}{F'_y}\Delta x_1 - \ldots - \dfrac{F'_{x_n}}{F'_y}\Delta x_n + \tilde{\alpha}_1\Delta x_1 + \ldots + \tilde{\alpha}_n\Delta x_n$, где $\tilde{\alpha}_j \to 0$ при $\Delta x_1 \to 0, \ldots, \Delta x_n \to 0$.

Это означает по определению, что функция $y = f(x)$ дифференцируема в точке (x^1, y^1), и ее частные производные в этой точке вычисляются по формулам:

$$\frac{\partial f}{\partial x_j} = -\frac{F'_{x_j}}{F'_y}, \;\; j = 1, \ldots, n .$$

Теорема полностью доказана.

В качестве следствия из теоремы о существовании неявной функции можно сформулировать следующее утверждение о существовании и дифференцируемости обратной функции.

Следствие. Пусть функция $y = f(x)$ дифференцируема в некоторой окрестности точки x_0, и производная $f'(x)$ отлична от нуля в точке x_0 и непрерывна в этой точке. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ существует такая δ-окрестность точки y_0 $(y_0 = f(x_0))$, в которой единственным образом определена дифференцируемая обратная функция $x = \varphi(y) = f^{-1}(y)$, удовлетворяющая условиям:

1) $\varphi(y_0) = f^{-1}(y_0) = x_0$,

2) $|\varphi(y) - x_0| < \varepsilon$,

3) $\varphi'(y) = (f^{-1})'(y) = \dfrac{1}{f'(x)}$.

Доказательство. Рассмотрим функцию $x = \varphi(y)$ как неявную функцию, определяемую функциональным уравнением: $F(x, y) = f(x) - y = 0$ в окрестности точки $M_0(x_0, y_0)$. Из условий следствия ясно, что функция $F(x, y)$ дифференцируема в некоторой окрестности точки $M_0(x_0, y_0)$, $F(M_0) = F(x_0, y_0) = 0$. Кроме того, её частная производная $F'_x(M_0) = f'(x_0) \neq 0$, и $F'_x(x, y)$ непрерывна в точке $M_0(x_0, y_0)$. Таким образом, выполнены все условия теоремы 1.

Из теоремы 1 следует, что для любого $\varepsilon > 0$ существует такая δ-окрестность $B_\delta(y_0)$ точки y_0, в которой единственным образом определена неявная функция $x = \varphi(y)$, обращающая равенство $F(x, y) = f(x) - y = 0$ в тождество: $f(\varphi(y)) \equiv y$, и удовлетворяющая условию: $\left|\varphi(y) - x_0\right| < \varepsilon$ всюду в окрестности $B_\delta(y_0)$.

Это означает, что $x = \varphi(y) = f^{-1}(y)$ - обратная функция к $f(x)$ в рассматриваемой окрестности. Кроме того, из теоремы 1 следует, что эта функция дифференцируема в той же окрестности, и её производная (в данном случае не частная, а полная, так как это функция одной переменной) вычисляется по формуле:

$$\frac{d\varphi}{dy}=\frac{d(f^{-1})}{dy}=-\frac{F'_y}{F'_x}=-\frac{(-1)}{df/dx}=\left(\frac{df}{dx}\right)^{-1}$$

(Эта формула для производной обратной функции была получена в первом семестре другим способом). Следствие доказано.

Лекция 23
Неявные функции, определяемые системой функциональных уравнений

Ранее мы рассматривали вопрос о существовании и дифференцировании неявной функции, определяемой одним функциональным уравнением. Теперь рассмотрим аналогичный вопрос для совокупности m (m – натуральное число, $m > 1$) неявных функций, определяемых системой m функциональных уравнений.

Пусть задана система функциональных уравнений:

$$\begin{cases} F_1(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m) = 0, \\ \dots\dots\dots\dots \\ F_m(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m) = 0, \end{cases} \qquad (1)$$

и требуется найти её решение в виде набора функций

$$\begin{cases} y_1 = f_1(x_1, \dots, x_n), \\ \dots\dots\dots\dots \\ y_m = f_m(x_1, \dots, x_n), \end{cases} \qquad (2)$$

обращающих эту систему в систему тождеств в некоторой заданной области $G \subseteq \mathbb{R}^n$, где $\mathbb{R}^n$- пространство переменных $x_1, x_2, \dots, x_n$.

Изучим вопрос о разрешимости системы функциональных уравнений (1) относительно $y_1, y_2, \dots, y_m$. Решение (2) системы (1) мы будем называть *непрерывным и дифференцируемым* в некоторой области G изменения переменных $x_1, x_2, \dots, x_n$, если каждая из функций (2) непрерывна и дифференцируема в области G.

Рассмотрим m функций $F_1, F_2, \dots, F_m$, стоящих в левых частях системы (1), и составим из частных производных этих функций определитель:

$$\Delta = \begin{vmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial y_1} & \dots & \frac{\partial F_1}{\partial y_m} \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial F_m}{\partial y_1} & \dots & \frac{\partial F_m}{\partial y_m} \end{vmatrix} \qquad (3)$$

Будем называть определитель вида (3) *определителем Якоби (*или кратко *якобианом*) функций $F_1, F_2, \dots, F_m$ по переменным $y_1, y_2, \dots, y_m$ и кратко обозначать его символом

$$\frac{D(F_1, F_2, \dots, F_m)}{D(y_1, y_2, \dots, y_m)}.$$

Теперь мы можем сформулировать важное обобщение теоремы о неявной функции.

Теорема 2. (*о существовании системы неявных функций, определяемых системой функциональных уравнений).* Пусть

1) m функций

$$\begin{cases} F_1(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m), \\ \dots\dots\dots\dots \\ F_m(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m), \end{cases}$$

определены и дифференцируемы в некоторой окрестности точки $M_0(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0, y_1^0, y_2^0, \dots, y_m^0)$, $M_0 \in \mathbb{R}^{n+m}$;

2) все частные производные этих функций по переменным $y_1, y_2, \dots, y_m$ непрерывны в точке M_0;

3) в точке M_0 все функции $F_1, F_2, \dots, F_m$ обращаются в нуль, то есть выполнена система (1);

4) якобиан $\frac{D(F_1, F_2, \dots, F_m)}{D(y_1, y_2, \dots, y_m)}$ отличен от нуля в M_0.

Тогда для любых положительных чисел $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_m$ найдется $\delta > 0$ такое, что в $B_\delta(x^0)$, $x^0 = (x_1^0, \dots, x_n^0)$ существует единственный набор из m функций (2), удовлетворяющий условиям: $|f_1(x) - y_1^0| < \varepsilon_1, |f_2(x) - y_2^0| < \varepsilon_2, \dots, |f_m(x) - y_m^0| < \varepsilon_m$, $x \in B_\delta(x^0)$, и являющийся решением системы уравнений (1), причем это решение непрерывно и дифференцируемо в указанной окрестности точки x^0.

Замечание. При $m = 1$ теорема 2 совпадает с доказанной ранее теоремой 1 о неявной функции, поскольку в этом случае якобиан (3) совпадает с частной производной $\frac{\partial F_1}{\partial y_1}$.

Доказательство. Проведём рассуждения методом математической индукции. При $m = 1$ теорема уже доказана. Поэтому для проведения индукции достаточно предположить, что теорема справедлива для системы, состоящей из $m-1$ функционального уравнения при некотором $m \geq 2$, и доказать её справедливость для системы, состоящей из m функциональных уравнений.

Итак, по условию теоремы, якобиан $\Delta(M_0) \neq 0$. Тогда хотя бы один из миноров $(m-1)$ –го порядка этого якобиана также отличен от нуля в точке M_0. Не ограничивая общности, будем считать, что в точке M_0 отличен от нуля минор, стоящий в левом верхнем углу, то есть $\Delta_m(M_0) \neq 0$, где

$$\Delta_m = \begin{vmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial y_1} & \cdots & \frac{\partial F_1}{\partial y_{m-1}} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial F_{m-1}}{\partial y_1} & \cdots & \frac{\partial F_{m-1}}{\partial y_{m-1}} \end{vmatrix}$$

Тогда, по предположению индукции, система, состоящая из первого $m-1$ уравнения системы (1), разрешима относительно переменных $y_1, y_2, \ldots, y_{m-1}$.

Точнее, для достаточно малых положительных чисел $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_{m-1}$ найдется такая окрестность точки $\tilde{x}^0 = (x_1^0, \ldots, x_n^0, y_m^0)$ пространства $\mathbb{R}^{n+1}$, в которой единственным образом определен набор из $m-1$ функции

$$\begin{cases} y_1 = g_1(x_1, \ldots, x_n, y_m), \\ \quad \cdots\cdots\cdots\cdots \\ y_{m-1} = g_{m-1}(x_1, \ldots, x_n, y_m), \end{cases}$$

удовлетворяющих условиям $|g_1(\tilde{x}^0) - y_1^0| < \varepsilon_1, \ldots, |g_{m-1}(\tilde{x}^0) - y_{m-1}^0| < \varepsilon_{m-1}$ и являющихся единственным и дифференцируемым решением системы, состоящей из первого $m-1$ уравнения системы (1).

Подставим найденные функции $y_1, y_2, \ldots, y_{m-1}$ в левую часть последнего из уравнений (1). При этом последняя из функций превращается в некоторую функцию ψ, зависящую только от переменных $x_1, \ldots, x_n, y_m$:

$$F_m(x_1, \ldots, x_n, g_1(x_1, \ldots, x_n, y_m), \ldots, g_{m-1}(x_1, \ldots, x_n, y_m), y_m) = \psi(x_1, \ldots, x_n, y_m). \qquad (4)$$

Таким образом, последнее из уравнений системы (1) превращается в уравнение:

$$\psi(x_1, \ldots, x_n, y_m) = 0. \qquad (5)$$

Заметим, что функция $\psi(x_1, \ldots, x_n, y_m)$ дифференцируема в некоторой окрестности точки $\tilde{x}^0 = (x_1^0, \ldots, x_n^0, y_m^0)$ как сложная функция. Из соотношения (4) следует, что

$$\psi(\tilde{x}^0) = \psi(x_1^0, \ldots, x_n^0, y_m^0) = 0.$$

Покажем, что уравнение (5) разрешимо относительно переменной y_m. Для этого достаточно показать, что частная производная $\frac{\partial \psi}{\partial y_m}$ непрерывна и отлична от нуля в точке $\tilde{x}^0$. С этой целью вычислим указанную частную производную.

Подставим в первые $m-1$ уравнений системы (1) функции $g_1, g_2, \ldots, g_{m-1}$, являющиеся решением этих уравнений, и продифференцируем полученные при этом тождества по y_m. Кроме этого, продифференцируем по y_m соотношение (4). Получим систему:

$$\begin{cases} \frac{\partial F_1}{\partial y_1}\frac{\partial g_1}{\partial y_m} + \cdots + \frac{\partial F_1}{\partial y_{m-1}}\frac{\partial g_{m-1}}{\partial y_m} + \frac{\partial F_1}{\partial y_m} = 0, \\ \quad \cdots \\ \frac{\partial F_{m-1}}{\partial y_1}\frac{\partial g_1}{\partial y_m} + \cdots + \frac{\partial F_1}{\partial y_{m-1}}\frac{\partial g_{m-1}}{\partial y_m} + \frac{\partial F_{m-1}}{\partial y_m} = 0, \\ \frac{\partial F_m}{\partial y_1}\frac{\partial g_1}{\partial y_m} + \cdots + \frac{\partial F_m}{\partial y_{m-1}}\frac{\partial g_{m-1}}{\partial y_m} + \frac{\partial F_m}{\partial y_m} = \frac{\partial \psi}{\partial y_m}. \end{cases}$$

Умножим теперь полученные равенства на алгебраические дополнения $\Delta_1, \ldots, \Delta_{m-1}, \Delta_m$ элементов последнего столбца якобиана Δ соответственно, а затем сложим эти равенства. Получим:

$$\sum_{k=1}^{m-1} \frac{\partial g_k}{\partial y_m}\left[\Delta_1 \frac{\partial F_1}{\partial y_k} + \Delta_2 \frac{\partial F_2}{\partial y_k} + \ldots + \Delta_m \frac{\partial F_m}{\partial y_k}\right] + \left(\Delta_1 \frac{\partial F_1}{\partial y_m} + \Delta_2 \frac{\partial F_2}{\partial y_m} + \ldots + \Delta_m \frac{\partial F_m}{\partial y_m}\right) = \Delta_m \frac{\partial \psi}{\partial y_m}.$$

Так как сумма произведений элементов данного столбца определителя на соответствующие алгебраические дополнения элементов этого столбца равна определителю, а сумма произведений элементов данного столбца определителя на соответствующие алгебраические дополнения элементов другого столбца равна нулю, то каждая квадратная скобка в последнем соотношении равна нулю, а круглая скобка равна якобиану Δ. Таким образом, мы получаем равенство (верное в некоторой окрестности точки M_0):

$$\Delta = \Delta_m \frac{\partial \psi}{\partial y_m}.$$

По нашему предположению, $\Delta_m(M_0) \neq 0$. Значит,

$$\frac{\partial \psi}{\partial y_m} = \frac{\Delta}{\Delta_m}.$$

Функции Δ и Δ_m состоят из частных производных функций $F_1, F_2, \ldots, F_m$ по переменным $y_1, y_2, \ldots, y_m$, непрерывных в точке M_0. Кроме того, поскольку якобиан Δ отличен от нуля в точке M_0, то и частная производная $\dfrac{\partial \psi}{\partial y_m}$ в точке $\tilde{x}^0$ отлична от нуля. Итак, доказано, что к уравнению (5) можно применить теорему о неявной функции.

Согласно этой теореме, для любого положительного числа ε_m найдется такая δ –окрестность точки $x^0 = (x_1^0, \ldots, x_n^0)$, что всюду в пределах этой окрестности определена функция

$$y_m = f_m(x_1, x_2, \ldots, x_n),$$

удовлетворяющая условию: $|f_m(x) - y_m^0| < \varepsilon_m$, $x \in B_\delta(x^0)$, и являющаяся единственным, непрерывным и дифференцируемым решением уравнения (5). Подставляя это решение в функции $g_1, g_2, \ldots, g_{m-1}$, мы получим функции $f_1, \ldots, f_{m-1}$, зависящие только от переменных $x_1, \ldots, x_n$:

$$y_k = g_k[x_1, \ldots, x_n, f_m(x_1, \ldots, x_n)] = f_k(x_1, \ldots, x_n), \quad k = 1, \ldots, m-1.$$

По теореме о дифференцируемости сложной функции, каждая из функций $f_1, \ldots, f_{m-1}$ дифференцируема в окрестности точки x^0. Таким образом, мы доказали, что m функций

$$\begin{cases} y_1 = f_1(x_1, \ldots, x_n), \\ \quad \ldots \\ y_m = f_m(x_1, \ldots, x_n) \end{cases}$$

удовлетворяют в окрестности точки x^0 условиям: $|f_1(x) - y_1^0| < \varepsilon_1, \ldots, |f_m(x) - y_m^0| < \varepsilon_m$ и являются непрерывным и дифференцируемым в этой окрестности решением системы (1). Единственность следует из построения.

Теорема полностью доказана

В качестве следствия из теоремы 2 сформулируем утверждение о существовании и дифференцируемости обратного отображения.

Следствие. Пусть функции $f_1(x_1, \ldots, x_n)$, … , $f_n(x_1, \ldots, x_n)$ определены и дифференцируемы в некоторой окрестности точки $x^0 = (x_1^0, \ldots, x_n^0)$, причем все частные производные $\dfrac{\partial f_k}{\partial x_j}$, $1 \leq k,\ j \leq n,$ непрерывны в точке x^0, а якобиан

$$\frac{D(f_1, \ldots, f_n)}{D(x_1, \ldots, x_n)}$$

в этой точке отличен от нуля.

Тогда для любого $\varepsilon > 0$ существует такая δ-окрестность точки $y^0 = (f_1(x^0), \dots, f_n(x^0))$, в которой единственным образом определены и дифференцируемы функции

$$x_1 = g_1(y_1, \dots, y_n), \dots, x_n = g_n(y_1, \dots, y_n),$$

удовлетворяющая соотношениям:

$$f_k\big(g_1(y_1, \dots, y_n), \dots, g_n(y_1, \dots, y_n)\big) = y_k, \qquad k = 1, \dots, n,$$

всюду в указанной окрестности.

Доказательство. Нужно применить теорему 2 к системе функциональных уравнений

$$\begin{cases} f_1(x_1, \dots, x_n) - y_1 = 0, \\ \dots \dots \dots \dots \\ f_n(x_1, \dots, x_n) - y_n = 0 \end{cases}$$

в окрестности точки $M_0(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0, y_1^0, y_2^0, \dots, y_n^0)$, где $y_k^0 = f_k(x_1^0, \dots, x_n^0)$.

Лекция 24.
Зависимость и независимость функций.

В курсе линейной алгебры рассматривается понятие линейной зависимости элементов линейного пространства. Например, в линейном пространстве функций n переменных, определённых на области $G \subseteq \mathbb{R}^n$, $m\ (m > 1)$ функций называются *линейно зависимыми*, если хотя бы одна из этих функций представляется в виде линейной комбинации (то есть линейной функции) остальных, и это равенство тождественно на области G.

Сейчас мы рассмотрим более общее понятие зависимости функций, чем линейная зависимость. Пусть в некоторой области $G \subseteq \mathbb{R}^n$, определены и дифференцируемы $m\ (m > 1)$ функций:

$$\begin{cases} y_1 = f_1(x_1, \dots, x_n), \\ \quad \dots\dots\dots\dots \\ y_m = f_m(x_1, \dots, x_n), \end{cases}$$

Определение 1. Функция $y_k = f_k(x)$ называется *(гладко) зависящей* от остальных функций в области G, если для любого $x \in G$ верно равенство:

$$f_k(x) = F(f_1(x), \dots, f_{k-1}(x), f_{k+1}(x), \dots, f_m(x)),$$

где $F(y_1, \dots, y_{k-1}, y_{k+1}, \dots, y_m)$, некоторая функция, определённая и дифференцируемая в соответствующей области изменения своих аргументов. Функции набора $f_1, \dots, f_m$ будем называть *зависимыми в области* G, если хотя бы одна из них зависит от остальных в области G. В противном случае функции называются *независимыми в области* G.

Рассмотрим простые примеры зависимых и независимых функций.

Примеры. 1) Рассмотрим функции двух переменных

$$f_1 = x + y,\ f_2 = xy,\ f_3 = x^2 + y^2.$$

Функции f_1, f_2, f_3 *зависимы во всём пространстве* $\mathbb{R}^2$, поскольку для любых $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ имеет место равенство:

$$f_3(x, y) = f_1^2(x, y) - 2f_2(x, y).$$

2) Функции $f_1 = x + y,\ f_2 = x - y$ являются *независимыми* в любой области $D \subset \mathbb{R}^2$, такой, что $(0, 0) \in D$. В самом деле, если взять $x = y$, то $f_1(x, x) = 2x,\ f_2(x, x) \equiv 0$. В этом случае, то есть на пересечении области D с прямой $L_1 : x = y$, функция f_1 не выражается через f_2. Аналогично, на пересечении области D с прямой $L_2 : x = -y$, функция f_2 не выражается через f_1, так как в этом случае $f_1(x, -x) \equiv 0,\ f_2(x, -x) = 2x$. (Если область D содержит точку $(0;0)$, то она заведомо содержит некоторую шаровую окрестность этой точки, а значит, точки вида $(x;x)$, $(x;-x)$, где $x \neq 0$).

Рассмотрим теперь достаточное условие независимости функций.

Теорема 1. Пусть задана система функций: $y_1 = f_1(x_1, \dots, x_n),\ \dots, y_m = f_m(x_1, \dots, x_n)$, где $n \geq m > 1$. Пусть все функции этого набора определены и дифференцируемы в некоторой окрестности точки $M_0 = (x_1^0, \dots, x_n^0)$. Тогда, если якобиан из этих функций по каким-либо m переменным отличен от нуля в точке M_0, то функции данной системы независимы в некоторой окрестности точки M_0.

Доказательство. Не ограничивая общности, будем считать, что в точке M_0 отличен от нуля якобиан

$$\Delta = \frac{D(f_1, \dots, f_m)}{D(x_1, \dots, x_m)}.$$

Будем рассуждать от противного. Предположим, что функции $f_1, \dots, f_m$ зависимы в некоторой окрестности точки M_0, т.е. одна из этих функций, например f_k, для всех точек этой окрестности выражается в виде $f_k(x) = F(f_1(x), \dots, f_{k-1}(x), f_{k+1}(x), \dots, f_m(x))$, где $F(y_1, \dots, y_{k-1}, y_{k+1}, \dots, y_m)$, некоторая функция, определённая и дифференцируемая в рассматриваемой окрестности. Пользуясь правилом дифференцирования сложной функции, вычислим производную функции F по любой из переменных x_l, $l = 1, \dots, m$. Получаем следующие равенства:

$$\frac{\partial f_k}{\partial x_l} = \frac{\partial F}{\partial y_1}\frac{\partial f_1}{\partial x_l} + \dots + \frac{\partial F}{\partial y_{k-1}}\frac{\partial f_{k-1}}{\partial x_l} + \frac{\partial F}{\partial y_{k+1}}\frac{\partial f_{k+1}}{\partial x_l} + \dots + \frac{\partial F}{\partial y_m}\frac{\partial f_m}{\partial x_l},$$

$l = 1, \dots, m$. Эти соотношения, рассматриваемые в точке M_0, показывают, что k −я строка якобиана $\Delta(M_0)$ представляет собой линейную комбинацию остальных строк с коэффициентами, соответственно равными $\frac{\partial F}{\partial y_1}, \dots, \frac{\partial F}{\partial y_{k-1}}, \frac{\partial F}{\partial y_{k+1}}, \dots, \frac{\partial F}{\partial y_m}$ (все производные вычислены в точке M_0). Но в этом случае якобиан $\Delta(M_0)$ равен нулю, что противоречит условию теоремы. Доказательство закончено.

Пример. 3) Выше в примере 2) рассматривались две функции $f_1 = x + y$, $f_2 = x - y$, и с помощью определения 1 была показана их независимость в окрестности точки $(0;0)$. Применяя к этим функциям теорему 1, получаем, что они независимы в окрестности любой точки пространства $\mathbb{R}^2$, поскольку всюду в $\mathbb{R}^2$ якобиан

$$\frac{D(f_1, f_2)}{D(x,\ y)} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -2 \neq 0.$$

Функциональные матрицы и их приложения.

Пусть снова задана система m функций от n переменных

$$\begin{cases} y_1 = f_1(x_1, \dots, x_n), \\ \dots\dots\dots\dots \\ y_m = f_m(x_1, \dots, x_n). \end{cases}$$

Будем предполагать, что функции $f_1, \dots, f_m$ определены и дифференцируемы в некоторой окрестности точки $M_0 = (x_1^0, \dots, x_n^0)$, причем все частные производные первого порядка этих функций непрерывны в самой точке M_0. Рассмотрим вопрос о том, какие из функций данной системы являются независимыми. С этой целью составим из частных производных всех функций по всем переменным следующую функциональную матрицу:

$$\Phi = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n} \end{pmatrix}.$$

содержащую m строк и n столбцов. Справедливо следующее замечательное утверждение.

Теорема 2. Пусть функциональная матрица Φ обладает свойствами:

1) некоторый минор r −го порядка отличен от нуля в точке $M_0 = (x_1^0, \dots, x_n^0)$ $(r \leq \min\{m, n\})$;

2) все миноры $r + 1$ −го порядка равны нулю в некоторой окрестности точки M_0 (если $r < \min\{m, n\}$).

Тогда r функций, представленных в указанном миноре r −го порядка, независимы в окрестности точки M_0, а каждая из остальных функций зависит в этой окрестности от указанных r функций.

Доказательство. Не ограничивая общности, можно считать, что в точке M_0 отличен от нуля минор, стоящий в левом верхнем углу матрицы Φ, т.е. определитель $\Delta_r(M_0) \neq 0$, где

$$\Delta_r = \begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_r} \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial f_r}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_r}{\partial x_r} \end{vmatrix}.$$

Тогда из теоремы 1 сразу вытекает независимость функций $f_1, \dots, f_r$ в окрестности точки M_0. Если $r = m,$ то доказательство завершено.
Пусть $r < m$. Нужно доказать, что любая из остальных функций $f_{r+1}, \dots, f_m$ зависит в окрестности M_0 от $f_1, \dots, f_r$. Зафиксируем произвольное j от $r+1$ до m и докажем, что функция f_j зависит в окрестности M_0 от $f_1, \dots, f_r$.

Рассмотрим систему функциональных уравнений:

$$\begin{cases} F_1(x_1, \dots, x_n, g_1, \dots, g_r) \equiv f_1(x_1, \dots, x_n) - g_1 = 0, \\ \dots\dots\dots\dots \\ F_r(x_1, \dots, x_n, g_1, \dots, g_r) \equiv f_r(x_1, \dots, x_n) - g_r = 0. \end{cases} \tag{1}$$

Заметим, что эта система разрешима относительно переменных $x_1, \dots, x_r$ в некоторой окрестности точки $N_0 = (x_1^0, \dots, x_n^0, g_1^0, \dots, g_r^0)$, где $g_k^0 = f_k(M_0)$, $k = 1, \dots, r$. Действительно, якобиан $\frac{D(F_1,\dots,F_r)}{D(x_1,\dots,x_r)}$, совпадает с минором Δ_r, следовательно, он отличен от нуля в точке N_0. Значит, выполняются все условия теоремы о системе функциональных уравнений, и всюду в достаточно малой окрестности точки N_0 система имеет единственное и дифференцируемое решение

$$\begin{cases} x_1 = \psi_1(x_{r+1}, \dots, x_n, g_1, \dots, g_r), \\ \dots\dots\dots\dots \\ x_r = \psi_r(x_{r+1}, \dots, x_n, g_1, \dots, g_r). \end{cases}$$

Подставим это решение в функцию f_j:

$$y_j = f_j(\psi_1(x_{r+1}, \dots, x_n, g_1, \dots, g_r), \dots, \psi_r(x_{r+1}, \dots, x_n, g_1, \dots, g_r), x_{r+1}, \dots, x_n) = \\ = \varphi(x_{r+1}, \dots, x_n, g_1, \dots, g_r). \tag{2}$$

Мы хотим теперь показать, что на самом деле функция φ не зависит от переменных $x_{r+1}, \dots, x_n$, а только от $g_1, \dots, g_r$. Если $r = n$, то все уже доказано. Пусть $r < n$.

Зафиксируем число l от $r+1$ до n и вычислим частную производную $\dfrac{\partial \varphi}{\partial x_l}$. Мы хотим показать, что она равна нулю в некоторой окрестности точки N_0 (тем самым покажем, что функция φ не зависит от переменных x_l в этой окрестности). Для этого подставим функции $\psi_1, \dots, \psi_r$ в систему (1) и продифференцируем полученные соотношения по x_l. Кроме этого, продифференцируем по x_l равенство (2). Получим систему уравнений:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f_1}{\partial x_1}\dfrac{\partial \psi_1}{\partial x_l} + \dots + \dfrac{\partial f_1}{\partial x_r}\dfrac{\partial \psi_r}{\partial x_l} + \dfrac{\partial f_1}{\partial x_l} = 0, \\ \dots \\ \dfrac{\partial f_r}{\partial x_1}\dfrac{\partial \psi_1}{\partial x_l} + \dots + \dfrac{\partial f_r}{\partial x_r}\dfrac{\partial \psi_r}{\partial x_l} + \dfrac{\partial f_r}{\partial x_l} = 0, \\ \dfrac{\partial f_j}{\partial x_1}\dfrac{\partial \psi_1}{\partial x_l} + \dots + \dfrac{\partial f_j}{\partial x_r}\dfrac{\partial \psi_r}{\partial x_l} + \dfrac{\partial f_j}{\partial x_l} = \dfrac{\partial \varphi}{\partial x_l}. \end{cases} \tag{3}$$

Рассмотрим теперь следующий минор $r+1$ –го порядка матрицы Ф:

$$\Delta^j = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial x_1} & \dots & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_r} & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_l} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dfrac{\partial f_r}{\partial x_1} & \dots & \dfrac{\partial f_r}{\partial x_r} & \dfrac{\partial f_r}{\partial x_l} \\ \dfrac{\partial f_j}{\partial x_1} & \dots & \dfrac{\partial f_j}{\partial x_r} & \dfrac{\partial f_j}{\partial x_l} \end{vmatrix}$$

По условию теоремы этот минор равен нулю всюду в окрестности точки M_0.

Обозначим через $\Delta_1^j, \dots, \Delta_{r+1}^j$ алгебраические дополнения элементов последнего столбца определителя Δ^j (заметим, что тогда $\Delta_{r+1}^j = \Delta_r$).

Умножим равенства системы (3) на $\Delta_1^j, \dots, \Delta_{r+1}^j$ соответственно и сложим все полученные соотношения. В силу теоремы о том, что сумма произведений элементов данного столбца на соответствующие алгебраические дополнения элементов этого (другого) столбца равна определителю (нулю), получим

$$\Delta^j = \frac{\partial\varphi}{\partial x_l}\Delta_r.$$

Отсюда $\dfrac{\partial\varphi}{\partial x_l} = \dfrac{\Delta^j}{\Delta_r}$ в окрестности точки M_0. Заметим, что по условию теоремы определитель $\Delta_r \neq 0$ в точке M_0, а значит, в силу непрерывности и в некоторой окрестности, и наше деление законно. С другой стороны, определитель Δ^j равен нулю в окрестности точки M_0. Следовательно, производная $\dfrac{\partial\varphi}{\partial x_l}$ равна нулю в окрестности точки M_0, значит, функция φ не зависит в этой окрестности от переменной x_l. Это справедливо для любого l от $r+1$ до n, таким образом всюду в окрестности точки M_0:

$$y_j = \varphi(g_1, \dots, g_r) = \varphi(y_1, \dots, y_r),$$

где $\varphi -$ дифференцируемая функция. Значит, действительно функция f_j зависит в указанной окрестности от функций $f_1, \dots, f_r$, где j – произвольное число от $r+1$ до m.

Теорема доказана.

Пример. Исследуем зависимость функций

$$\begin{cases} f_1 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 \\ f_2 = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \\ f_3 = 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_1x_4 + 2x_2x_3 + 2x_2x_4 + 2x_3x_4 \end{cases}$$

Функциональная матрица имеет в данном случае вид:

$$\Phi = \begin{pmatrix} 2x_1 & 2x_2 & 2x_3 & 2x_4 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2x_2 + 2x_3 + 2x_4 & 2x_1 + 2x_3 + 2x_4 & 2x_1 + 2x_2 + 2x_4 & 2x_1 + 2x_2 + 2x_3 \end{pmatrix}$$

Непосредственной проверкой можно убедиться в том, что все определители третьего порядка тождественно равны нулю.

Например,

$$\begin{vmatrix} 2x_1 & 2x_2 & 2x_3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2x_2 + 2x_3 + 2x_4 & 2x_1 + 2x_3 + 2x_4 & 2x_1 + 2x_2 + 2x_4 \end{vmatrix} =$$

$$= 4(x_2(x_1 + x_2 + x_4) - x_3(x_1 + x_3 + x_4) - x_1(x_1 + x_2 + x_4) + x_3(x_2 + x_3 + x_4) +$$
$$+ x_1(x_1 + x_3 + x_4) - x_2(x_2 + x_3 + x_4)) = 4(x_1x_2 + x_2^2 + x_2x_4 - x_1x_3 - x_3^2 - x_3x_4 -$$
$$- x_1^2 - x_1x_2 - x_1x_4 + x_2x_3 + x_3^2 + x_3x_4 + x_1^2 + x_1x_3 - x_2x_3 - x_2^2 - x_2x_4 + x_1x_4) = 0.$$

При этом в любой точке пространства (x_1, x_2, x_3, x_4), у которой не все четыре координаты совпадают, хотя бы один из определителей второго порядка

$$\begin{vmatrix} 2x_1 & 2x_2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 2x_1 & 2x_3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 2x_1 & 2x_4 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}$$

отличен от нуля. Значит, в окрестности любой указанной точки функции f_1 и f_2 независимы, а функция f_3 зависит от f_1 и f_2.

Лекция 25.

Условный локальный экстремум функции многих переменных

Ранее мы рассматривали понятие локального экстремума функции. Теперь наша цель – рассмотреть более общее понятие условного локального экстремума и способы его отыскания. В точке локального экстремума функция принимает значение, которое больше (меньше) значений этой функции во всех точках некоторой окрестности. Однако довольно часто в практических задачах требуется отыскать точку, в которой данная функция принимает значение, большее (или меньшее) её значений не во всей окрестности этой точки, а лишь в некоторой её части, точки которой удовлетворяют специальным условиям (так называемым условиям связи). Эти условия связи обычно задают набором уравнений.

Пример. Требуется найти экстремум функции $f(x,y)=x^2-y^2$ на прямой L: $y=2x$. Таким образом, переменные x и y связаны между собой уравнением: $y-2x=0$.

Эта задача легко решается. Достаточно подставить равенство $y=2x$ в выражение для функции. Получим:

$$g(x)=x^2-4x^2=-3x^2.$$

Так как полученная функция всюду отрицательна, кроме точки 0, где она равна 0, то очевидно, что $x_0=0$ – точка её максимума (даже не локального, а глобального). Однако исходная функция $f(x,y)=x^2-y^2$ в точке (0;0) не имеет локального экстремума, в чём нетрудно убедиться.

Сформулируем теперь общее понятие условного экстремума. Пусть в некоторой области $G\subseteq\mathbb{R}^{n+m}$ задана функция $n+m$ переменных $f(x_1,\dots,x_n,y_1,\dots,y_m)$ и система уравнений:

$$\begin{cases} F_1(x_1,\dots,x_n,y_1,\dots,y_m)=0 \\ \dots\dots\dots \\ F_m(x_1,\dots,x_n,y_1,\dots,y_m)=0 \end{cases} \qquad (1)$$

Определение 1. *Условным локальным экстремумом* функции f при условиях связи (1) называется точка $M_0(x_1^0,\dots,x_n^0,y_1^0,\dots,y_m^0)$ такая, что её координаты удовлетворяют условиям связи (1), и существует окрестность точки M_0, в пределах которой значение функции $f(M_0)$ является наибольшим (наименьшим) среди её значений во всех точках этой окрестности, которые удовлетворяют условиям связи (1).

Рассмотрим задачу об отыскании условного локального экстремума функции $f(x_1,\dots,x_n,y_1,\dots,y_m)$ при условиях связи (1).

Необходимые условия существования условного локального экстремума

Выясним, каковы необходимые условия существования условного локального экстремума в рассматриваемой точке M_0.

Для решения этого вопроса будем предполагать, что все функции в левых частях системы (1) дифференцируемы в некоторой окрестности рассматриваемой точки M_0, их частные производные по переменным $(y_1,\dots,y_m)$ непрерывны в самой точке M_0, и якобиан $\frac{D(F_1,\dots,F_m)}{D(y_1,\dots,y_m)}\neq 0$ в точке M_0. Таким образом, выполнены все условия теоремы о существовании системы неявных функций, и следовательно, для любых положительных чисел $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\dots,\varepsilon_m$ найдётся окрестность точки $x^0=(x_1^0,\dots,x_n^0)$, в которой единственным образом определён набор m дифференцируемых неявных функций:

$$\begin{cases} y_1=\varphi_1(x_1,\dots,x_n) \\ \dots\dots\dots \\ y_m=\varphi_m(x_1,\dots,x_n) \end{cases}, \qquad (2)$$

определяемых системой функциональных уравнений (1) и удовлетворяющих неравенствам:

$$|y_1-y_1^0|<\varepsilon_1, |y_2-y_2^0|<\varepsilon_2,\dots,|y_m-y_m^0|<\varepsilon_m.$$

Подставив равенства (2) в функцию $f(x_1,\dots,x_n,y_1,\dots,y_m)$, мы сведём нашу задачу к задаче об отыскании обычного локального экстремума функции

$$f(x_1,\dots,x_n,\varphi_1(x_1,\dots,x_n),\dots,\varphi_m(x_1,\dots,y_n)) \equiv \Phi(x_1,\dots,x_n) \qquad (3)$$

в точке $x^0=(x_1^0,\dots,x_n^0)$. Необходимые условия для этого нам известны. А именно, если в точке x^0 имеется локальный экстремум функции $\Phi(x_1,\dots,x_n)$, то её дифференциал в этой точке равен нулю при любых достаточно малых приращениях переменных, то есть имеем равенство:

$$d\Phi=\Phi'_{x_1}dx_1+\dots+\Phi'_{x_n}dx_n=0$$

(все частные производные вычислены в точке N_0). Далее, в силу тождества (3) и инвариантности формы записи первого дифференциала, имеем равенство:

$$d\Phi=df=f'_{x_1}dx_1+\dots+f'_{x_n}dx_n+f'_{y_1}dy_1+\dots+f'_{y_m}dy_m=0. \qquad (4)$$

В равенстве (4) дифференциалы $dy_i=d\varphi_i$ $(i=1,\dots,m)$ – дифференциалы найденных неявных функций. Они могут быть выражены через дифференциалы $dx_1,\dots,dx_n$ в виде их линейных комбинаций следующим образом. При подстановке неявных функций $\varphi_1(x),\dots,\varphi_m(x)$ в систему уравнений связи (1) в некоторой окрестности точки x^0 возникает система тождеств:

$$\begin{cases} F_1(x_1,\dots,x_n,\varphi_1(x),\dots,\varphi_m(x))\equiv 0 \\ \dots\dots\dots \\ F_m(x_1,\dots,x_n,\varphi_1(x),\dots,\varphi_m(x))\equiv 0 \end{cases} \qquad (5)$$

Дифференцируя эти тождества, получаем линейную систему:

$$\begin{cases} \frac{\partial F_1}{\partial x_1}dx_1+\dots+\frac{\partial F_1}{\partial x_n}dx_n+\frac{\partial F_1}{\partial y_1}dy_1+\dots+\frac{\partial F_1}{\partial y_m}dy_m=0 \\ \dots\dots\dots \\ \frac{\partial F_m}{\partial x_1}dx_1+\dots+\frac{\partial F_m}{\partial x_n}dx_n+\frac{\partial F_m}{\partial y_1}dy_1+\dots+\frac{\partial F_m}{\partial y_m}dy_m=0 \end{cases} \qquad (6)$$

(Напомним, что все частные производные вычислены в точке x^0). В силу наложенного ранее условия $\frac{D(F_1,\dots,F_m)}{D(y_1,\dots,y_m)}\neq 0$ система (6) имеет единственное решение относительно дифференциалов $dy_1=d\varphi_1,\dots,dy_m=d\varphi_m$.

То есть каждый из дифференциалов $dy_1,\dots,dy_m$ представляется в виде некоторой линейной комбинации дифференциалов $dx_1,\dots,dx_n$. Подставляя эти линейные комбинации в равенство (4) и приводя подобные члены, получим уравнение вида:

$$A_1dx_1+\dots+A_ndx_n=0.$$

(Можно отметить, что полученные константы $A_1,\dots,A_n$ – это просто частные производные в точке x^0 вышеупомянутой функции $\Phi(x_1,\dots,x_n)$). Отсюда получаем, что необходимыми условиями локального условного экстремума при описанных условиях является равенство нулю указанных констант, то есть равенства:

$$A_1=A_2=\dots=A_n=0. \qquad (7)$$

Итак, мы можем сформулировать следующее

Утверждение *(Необходимые условия условного локального экстремума).* Если система (1) уравнений связи удовлетворяет (по отношению к переменным $y_1,\dots,y_m$) в окрестности точки $M_0(x_1^0,\dots,x_n^0,y_1^0,\dots,y_m^0)$ условиям теоремы о существовании системы дифференцируемых неявных функций, то необходимыми условиями для существования условного локального экстремума у функции $f(x_1,\dots,x_n,y_1,\dots,y_m)$ в точке M_0 являются равенства (7), получаемые из уравнения (4) и системы (6). Поэтому в описанных условиях для отыскания $n+m$ координат точки возможного экстремума следует решить систему из $n+m$ уравнений:

$$\begin{cases} A_1=A_2=\dots=A_n=0 \\ F_1(x_1,\dots x_n,y_1,\dots,y_m)=0 \\ \dots\dots\dots \\ F_m(x_1,\dots,x_n,y_1,\dots,y_m)=0 \end{cases}.$$

Метод неопределённых множителей Лагранжа

Рассмотрим теперь метод, предложенный Лагранжем для отыскания локального условного экстремума. Этот метод, как мы увидим ниже, позволяет вывести и необходимые, и достаточные условия для существования условного локального экстремума рассматриваемой функции в данной точке M_0. В предыдущих рассмотрениях задачи о существовании условного экстремума мы опирались на то, что переменные $y_1, \ldots, y_m$ являются неявными функциями от $x_1, \ldots, x_n$, задаваемыми уравнениями связи (1). В методе Лагранжа отсутствует (в явном виде) представление $y_1, \ldots, y_m$ как функций от $x_1, \ldots, x_n$, то есть происходит симметризация переменных, они становятся равноправными.

Пусть по-прежнему задана функция $n+m$ переменных $f(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_m)$ и система уравнений (или условий) связи (1). Требуется найти необходимые и достаточные условия для существования в данной точке $M_0(x_1^0, \ldots, x_n^0, y_1^0, \ldots, y_m^0)$ условного локального экстремума функции $u = f(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_m)$ при данных условиях связи.

Для решения этой задачи предлагается рассмотреть специальную функцию.

Определение 2. *Функцией Лагранжа* рассматриваемой задачи называется функция $n+2m$ переменных

$$L(x,y;\lambda) = L(x,y;\lambda_1, \ldots, \lambda_m) = f(x,y) + \lambda_1 F_1(x,y) + \ldots + \lambda_m F_m(x,y),$$

где $x = (x_1, \ldots, x_n)$, $y = (y_1, \ldots, y_m)$, $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_m)$, $\lambda_j \in \mathbb{R}$, $j = 1, \ldots, m$.

Необходимые условия условного экстремума

Будем предполагать, как и выше, что функции $f(x,y)$, $F_1(x,y), \ldots, F_m(x,y)$ дифференцируемы в окрестности точки $M_0(x_1^0, \ldots, x_n^0, y_1^0, \ldots, y_m^0)$. Заметим, что тогда функция Лагранжа также дифференцируема. Будем (как и выше) предполагать также, что частные производные функций $F_1(x,y), \ldots, F_m(x,y)$ по переменным $(y_1, \ldots, y_m)$ непрерывны в самой точке M_0, и якобиан $\frac{D(F_1,\ldots,F_m)}{D(y_1,\ldots,y_m)} \neq 0$ в точке M_0.

Пусть в точке M_0 у функции $f(x,y)$ имеется условный экстремум при условиях связи (1). Выясним, каким обязательным условиям должны удовлетворять в этом случае её координаты.

В силу сделанных выше предположений мы по-прежнему располагаем равенствами (4) и (6). Умножим каждое из равенств (6) на произвольные (пока неопределённые) постоянные множители $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$. Полученные после этого умножения равенства сложим почленно с равенством (4). В результате получим соотношение:

$$\sum_{i=1}^{n} (f'_{x_i} + \sum_{k=1}^{m} \lambda_k (F_k)'_{x_i})\, dx_i + \sum_{j=1}^{m} (f'_{y_j} + \sum_{k=1}^{m} \lambda_k (F_k)'_{y_j})\, dy_j =$$
$$= L'_{x_1} dx_1 + \ldots + L'_{x_n} dx_n + L'_{y_1} dy_1 + \ldots + L'_{y_m} dy_m = 0.$$

Подберём $\lambda^0 = (\lambda_1^0, \ldots, \lambda_m^0)$ так, чтобы все коэффициенты при dy_j в последнем соотношении равнялись нулю ($j = 1, \ldots, m$). Это означает, что набор $\lambda^0 = (\lambda_1^0, \ldots, \lambda_m^0)$ должен быть решением системы:

$$\begin{cases} L'_{y_1} = f'_{y_1} + \sum_{k=1}^{m} \lambda_k (F_k)'_{y_1} = 0\,, \\ \dots\dots\dots \\ L'_{y_m} = f'_{y_m} + \sum_{k=1}^{m} \lambda_k (F_k)'_{y_m} = 0. \end{cases}$$

В силу наложенного выше условия, что $\frac{D(F_1,\dots,F_m)}{D(y_1,\dots,y_m)} \neq 0$ в точке M_0, такой набор постоянных $\lambda^0 = (\lambda_1^0, \dots, \lambda_m^0)$ определяется из системы единственным образом. После подстановки набора $\lambda^0 = (\lambda_1^0, \dots, \lambda_m^0)$ в функцию Лагранжа получаем:

$$dL = \sum_{i=1}^{n} (f'_{x_i} + \sum_{k=1}^{m} \lambda_k^0 (F_k)'_{x_i})\, dx_i = 0,$$

Отсюда, в силу независимости переменных $x_1, \dots, x_n$, следуют равенства:

$$f'_{x_i} + \sum_{k=1}^{m} \lambda_k^0 (F_k)'_{x_i} = 0, i = 1, \dots, n.$$

Объединяя все полученные условия и присоединяя к ним систему уравнений связи (1), получим итоговую систему из $n + 2m$ уравнений, которым при данных условиях обязаны удовлетворять координаты точки условного экстремума:

$$\begin{cases} f'_{x_1} + \sum_{k=1}^{m} \lambda_k (F_k)'_{x_1} = 0, \\ \dots \\ f'_{x_n} + \sum_{k=1}^{m} \lambda_k (F_k)'_{x_n} = 0, \\ f'_{y_1} + \sum_{k=1}^{m} \lambda_k (F_k)'_{y_1} = 0, \\ \dots \\ f'_{y_m} + \sum_{k=1}^{m} \lambda_k (F_k)'_{y_m} = 0, \\ F_1(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m) = 0, \\ \dots \\ F_m(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m) = 0. \end{cases}$$

Таким образом, каждой точке $M_0(x_1^0, \dots, x_n^0, y_1^0, \dots, y_m^0)$ условного экстремума при предположениях, перечисленных выше, соответствует единственное решение $(x_1^0, \dots, x_n^0, y_1^0, \dots, y_m^0, \lambda_1^0, \dots, \lambda_m^0)$ последней системы. Поэтому для поиска точек возможного условного экстремума следует решить эту систему и исключить из полученных решений параметры $\lambda^0 = (\lambda_1^0, \dots, \lambda_m^0)$. Тогда $(x_1^0, \dots, x_n^0, y_1^0, \dots, y_m^0)$ есть координаты возможного условного экстремума.

Таким образом, мы получили совокупность *необходимых условий (по методу Лагранжа) существования условного локального экстремума*

Отметим, что полученная система представляет собой равенство нулю всех частных производных функции Лагранжа, если формально рассматривать эту функцию как функцию $n + 2m$ *независимых переменных.* В этом и состоит *симметризация переменных* в методе Лагранжа.

Пример. Найдем «подозрительные» на условный экстремум точки функции $f(x,y)=x^2-y^2$ при условии $y-2x=0$. Составим функцию Лагранжа:

$$L(x,y,\lambda)=x^2-y^2+\lambda(y-2x).$$

Запишем необходимые условия экстремума:

$$\begin{cases} L'_x=2x-2\lambda=0,\\ L'_y=-2y+\lambda=0,\\ L'_\lambda=y-2x=0. \end{cases}$$

Отсюда $x=\lambda$, $y=\lambda/2$. Подставляем в последнее уравнение, получаем $\lambda=0$, следовательно, единственная точка, «подозрительная» на условный экстремум, это точка $M(0,0)$.

Достаточные условия существования условного экстремума

Рассмотрим теперь вопрос о том, каковы достаточные условия для условного локального экстремума. Пусть в точке $M_0(x_1^0,\dots,x_n^0,y_1^0,\dots,y_m^0)$ выполнены необходимые условия существования условного экстремума.

Пусть, кроме того, функция $f(x_1,\dots,x_n,y_1,\dots,y_m)$ и каждая из функций $F_j(x_1,\dots,x_n,y_1,\dots,y_m),(j=1,\dots,m)$, дифференцируемы в некоторой окрестности точки M_0, и дважды дифференцируемы в самой точке M_0.

Заметим, что в силу условий связи (1), приращения функций $\Delta f=f(x,y)-f(x^0,y^0)$ и $\Delta L=L(x,y,\lambda^0)-L(x^0,y^0,\lambda^0)$ совпадают. Поэтому наличие условного локального экстремума при условиях связи в точке M_0 у функции $f(x,y)$ равносильно наличию (при тех же условиях связи) локального экстремума в точке M_0 у функции $L(x,y,\lambda^0)$.

Кроме того, в силу системы (10), все первые частные производные функции L по переменным $y_1,\dots,y_m$ равны нулю при $\lambda=\lambda^0$, поэтому второй дифференциал сложной функции $L(x,y,\lambda^0)$ в точке M_0 имеет такой же вид квадратичной формы, как второй дифференциал функции *независимых* переменных. А именно:

$$d^2L=\left(\frac{\partial}{\partial x_1}dx_1+\dots+\frac{\partial}{\partial x_n}dx_n+\frac{\partial}{\partial y_1}dy_1+\dots+\frac{\partial}{\partial y_m}dy_m\right)^2 L.$$

Теперь ещё раз напомним, что мы ищем условный экстремум, поэтому на множестве, где осуществляется этот поиск, тождественно выполняются уравнения (1). Поэтому мы можем продифференцировать их и получить систему, аналогичную системе (6):

$$\begin{cases} \frac{\partial F_1}{\partial x_1}dx_1+\dots+\frac{\partial F_1}{\partial x_n}dx_n+\frac{\partial F_1}{\partial y_1}dy_1+\dots+\frac{\partial F_1}{\partial y_m}dy_m=0,\\ \dots\dots\dots\\ \frac{\partial F_m}{\partial x_1}dx_1+\dots+\frac{\partial F_m}{\partial x_n}dx_n+\frac{\partial F_m}{\partial y_1}dy_1+\dots+\frac{\partial F_m}{\partial y_m}dy_m=0. \end{cases}$$

Поскольку якобиан $\frac{D(F_1,\dots,F_m)}{D(y_1,\dots,y_m)}\neq 0$ точке M_0, то дифференциалы $dy_1,\dots,dy_m$ однозначно выражаются из системы через дифференциалы независимых переменных $dx_1,\dots,dx_n$в виде их линейных комбинаций. Подставляя эти выражения во второй дифференциал функции Лагранжа, получим квадратичную форму:

$$d^2L=K(dx_1,\dots,dx_n),$$

зависящую уже только от дифференциалов $dx_1,\dots,dx_n$. Отсюда следует, что если квадратичная форма $d^2L=K(dx_1,\dots,dx_n)$ является положительно (отрицательно) определённой, то в рассматриваемой точке M_0 имеется условный локальный минимум (максимум). Если же форма $d^2L=K(dx_1,\dots,dx_n)$ знакопеременна, то условного экстремума в точке M_0 нет.

Примеры. 1) Для функции $f(x,y) = x^2 - y^2$ при условии $y - 2x = 0$ имеем:

$$d^2L = 2dx^2 - 2dy^2.$$

Заметим, что при произвольных значениях dx и dy эта квадратичная форма является знакопеременной. Используем условие связи:

$$y - 2x = 0, \text{ следовательно, } dy - 2dx = 0.$$

Подставим $dy = 2dx$ в выражение для d^2L, получим

$$d^2L|_{dy=2dx} = 2dx^2 - 8dx^2 = -6dx^2 < 0$$

при всех значениях $dx \neq 0$. Значит, найденная точка $M(0,0)$ является точкой условного максимума.

2) Пусть задана функция $f(x,y,z) = 2x + 2y - z$. Требуется найти её условный локальный экстремум при наличии условия связи: $x^2 + y^2 + z^2 = 1$. Функция Лагранжа:

$$L(x,y,z,\lambda) = 2x + 2y - z + \lambda(x^2 + y^2 + z^2 - 1).$$

Приравнивая частные производные функции Лагранжа к нулю, получаем систему:

$$\begin{cases} 2 + 2\lambda x = 0, \\ 2 + 2\lambda y = 0, \\ -1 + 2\lambda z = 0, \\ x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0. \end{cases}$$

Из первых трех уравнений находим: $x = -\frac{1}{\lambda}$, $y = -\frac{1}{\lambda}$, $z = \frac{1}{2\lambda}$. Подставляем в последнее уравнение, получаем: $\frac{9}{4\lambda^2} = 1$, то есть $\lambda = \pm\frac{3}{2}$. Получаем две точки, «подозрительные» на экстремум:

$$M_1\left(\frac{2}{3}; \frac{2}{3}; -\frac{1}{3}\right) \text{ при } \lambda^0 = -\frac{3}{2} \text{ и } M_2\left(-\frac{2}{3}; -\frac{2}{3}; \frac{1}{3}\right) \text{ при } \lambda^0 = \frac{3}{2}.$$

Второй дифференциал функции Лагранжа имеет вид:

$$d^2L(M_0) = 2\lambda(dx^2 + dy^2 + dz^2).$$

Очевидно, что $d^2L(M_1) < 0$, $d^2L(M_2) > 0$. Значит, $M_1\left(\frac{2}{3}; \frac{2}{3}; -\frac{1}{3}\right)$ – точка условного локального максимума; $M_2\left(-\frac{2}{3}; -\frac{2}{3}; \frac{1}{3}\right)$ – точка условного локального минимума.